n° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 11.588

THESE

de DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. MERIC de BELLEFON

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES

Sujet: **Analyse de la reaction $K^- p \longrightarrow \Lambda^0 \pi^0$**

Soutenue le 17 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

Président: M. M. FROISSART

Examinateurs MM. M. CROZON
A. ASTIER
B. DIU
A. BERTHON
M. BAUBILLIER

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548103_0025

n° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 11.588

THESE

de DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. MERIC de BELLEFON

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES

Sujet: **Analyse de la reaction $K^- p \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$**

Soutenue le 17 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

Président: M. M. FROISSART

Examinateurs MM. M. CROZON
A. ASTIER
B. DIU
A. BERTHON
M. BAUBILLIER

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

-:-

INTRODUCTION 1

PREMIERE PARTIE.- SITUATION EXPERIMENTALE POUR LA REACTION $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$. 3

CHAPITRE I - LES DONNEES EXPERIMENTALES ET LEUR OBTENTION 5

I - Présentation des expériences 5
II - Dépouillement des films - Mesure 7
III - Bias et pondération 9

CHAPITRE II - REPRESENTATION DES DONNEES. ESTIMATIONS. 19

I - Sections efficaces 19
II - Distributions angulaires et polarisation 22

CHAPITRE III - RESULTATS CONNUS 31

I - Analyses existantes 31
II - Résultats. Résonances Y_1^* formées dans la voie $\Lambda \pi^\circ$ 34

DEUXIEME PARTIE.- ZEROS ET ONDES PARTIELLES 37

CHAPITRE I - FORMALISME 39

I - Amplitudes de transversité 39
II - La variable W et les quantites observées 43
III - Domaine d'analyticité 44
IV - Approximants. Estimateurs. Convergence . 45
V - Développement en ondes partielles : cas $0^+ 1/2^+ \to 0^- 1/2^+$. 46
VI - Les ambiguïtés 49

CHAPITRE II - PRESENTATION DES DONNEES 53

I - Des zéros vers l'amplitude F(W). 53
II - Les données et les zéros 54
III - Estimation de l'erreur sur la position des zéros 56

APPENDICE B-1 - LES PSEUDO-POLYNOMES $R_{j,\ell}(W)$ 63

APPENDICE B-2 - CONTINUITE DE L'AMPLITUDE F(W) 67

1 - Lien entre les ondes partielles et les zéros 67
2 - Prolongement de l'amplitude 69

APPENDICE B-3 -

1 - Des coefficients expérimentaux A_ℓ, B_ℓ vers les zéros de $\Sigma(W)$ 71
2 - Des zéros vers les coefficients A_ℓ, B_ℓ 72

TROISIEME PARTIE.- ANALYSE 75

CHAPITRE I - L'ANALYSE EN ONDES PARTIELLES CLASSIQUES 77

I - Rappels 77
II - Parametrage des amplitudes. Méthode de calcul 78
III - Résultats de l'analyse classique 80

CHAPITRE II - LES ZEROS, OUTILS DE L'ANALYSE EN ONDES PARTIELLES 85

I - Les données et les zéros 85
II - De 1540 à 1860 MeV 90
III - De 1850 à 2450 MeV 113

APPENDICE C-1 - A PROPOS DE LA RECONSTRUCTION DES AMPLITUDES 137

QUATRIEME PARTIE.- RESULTATS - DISCUSSION 139

CHAPITRE I - NOS RESULTATS ET LES ANALYSES RECENTES 141

I - Les résonances Σ entre 1540 et 2440 MeV 141
II - Comparaison aux analyses récentes 147

CHAPITRE II - DISCUSSION 155

CONCLUSION.- 159

REFERENCES.- 163

LEGENDE DES FIGURES.- 167

REMERCIEMENTS.-

I N T R O D U C T I O N

-:-

Depuis environ dix ans l'interaction $K^- p$ fait l'objet d'une étude systématique en dessous de 2,5 GeV/c dans l'espoir de mieux connaître le spectre des résonances baryoniques d'étrangeté inférieure ou égale à -1. Deux types d'expériences ont servi cette exploration, en effet :

Une résonance est soit "produite" dans ce cas elle est mise en évidence sur les distributions de masse effective des particules dans l'état final, soit "formée" elle s'observe alors comme une bosse dans la section efficace totale. L'interaction $K^- p$, caractérisée par un grand nombre de voies ouvertes à deux corps dans l'état final, a ainsi donné lieu à une série d'expériences dites de formation dans le but de déterminer les nombres quantiques caractéristiques des états résonnants intermédiaires ($K^- p \rightarrow Y^* \rightarrow ab$). Parmi les réactions à deux corps possibles l'une des mieux comprises est sans doute la réaction $K^- p \rightarrow \pi^\circ \Lambda$: en effet dans ce canal seule intervient une amplitude d'isospin 1 et la polarisation du Λ° est accessible. Cette réaction privilégiée, issue le plus souvent d'expériences en chambre à bulles, a permis la mise en évidence et l'analyse de résonances baryoniques d'isospin 1 et d'étrangeté -1 $\left[Y_1^*\right]$; cependant, parmi ces résonances si les unes sont sûres et, confirmées par d'autres analyses dans d'autres canaux, un certain nombre d'autres sont encore douteuses, soit parce qu'elles sont peu couplées au canal $\pi^\circ \Lambda$, soit parce que résultant d'analyses différentes, leur caractéristiques varient sensiblement de l'une à l'autre et mériteraient en conséquence un examen plus précis.

Ainsi et, même, pour une réaction privilégiée et considérée comme simple, s'il existe encore des discordances et des points obscurs, il était utile de faire un effort de synthèse et de clarification. Pour ces raisons, et parce que la région d'énergie disponible dans le centre de masse comprise entre 2,1 et 2,45 GeV/c est la moins explorée nous avons réalisé une expérience en chambre à bulles destinée à poursuivre l'étude de l'intéraction $K^- p$ précisément dans cette zône. Le travail que nous présentons ici s'inscrit d'une part dans le cadre de cette expérience en analysant la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ à l'aide de nouvelles données et, d'autre part reprenant un grand nombre de données disponibles expose une analyse détaillée de la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ depuis 400 MeV/c.

Dans une première partie nous présentons la situation expérimentale actuelle pour la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ ce qui nous permettra de discuter les biais et la pondération propres à ce type de réaction ainsi que les données disponibles que nous aurons à utiliser. Avant d'aborder la seconde partie nous ferons une revue des résonances baryoniques d'isospin 1 et d'étrangeté -1 et nous montrerons que cette zoologie présente encore des points obscurs.

La seconde partie sera entièrement consacrée à un formalisme récent dû à Barrelet que nous avons adapté à notre type d'analyse.

Dans la troisième partie, nous donnerons les résultats de notre analyse en ondes partielles classique pour la zone d'énergie comprise entre 2,1 GeV et 2,5 GeV et nous détaillerons notre analyse globale indépendante de l'énergie réalisée entre 1,5 et 2,5 GeV.

Enfin, et ce sera notre dernier chapitre, l'analyse que nous avons présentée sera comparée aux analyses déjà publiées. Nous discuterons les résultats obtenus et nous proposerons d'extraire de l'information à partir des trajectoires de zéros.

P R E M I E R E P A R T I E

-:-

SITUATION EXPERIMENTALE POUR LA REACTION $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$.

-:-

C H A P I T R E I

-:-

LES DONNEES EXPERIMENTALES ET LEUR OBTENTION.

-:-

I - PRESENTATION DES EXPERIENCES.

Les données que nous avons utilisées pour ce travail proviennent de 5 expériences de formation réalisées en chambre à bulles exposées à un faisceau de K^- et couvrent une zone d'énergie disponible dans le centre de masse comprise entre 1540 et 2440 MeV. Ces expériences sont le fruit de collaboration entre divers laboratoires, trois d'entre elles ont été réalisées au C.E.R.N. auprès du synchrotron à protons, les deux autres ont utilisé, l'une, l'accélérateur NIMROD du Rutherford Laboratory, l'autre, le Bevatron de Berkeley.

A) Expériences au C.E.R.N. (réf. 1, 2, 3).

La collaboration dite C.H.S. regroupant les laboratoires du C.E.R.N., de Heidelberg et de Saclay a effectué deux prises de photographies. Une première fois (1964) la chambre à bulles de 81 cm de Saclay était exposée à un faisceau de K^- séparé électrostatiquement donnant lieu à la prise de 350.000 photographies pour 29 impulsions de K^- entre 777 MeV/c et 1226 MeV/c tous les 20 MeV/c. La seconde fois, avec le même appareillage, 400.000 photo-

graphies étaient prises pour 19 impulsions de K^- comprises entre 436 et 793 MeV/c avec le même espacement étendant ainsi l'investigation de l'interaction K^- p vers les plus basses énergies. Plus récemment, une collaboration C.E.R.N. Heidelberg utilisant cette fois la chambre de 2 m du C.E.R.N. a pris 320.000 photographies et donné des mesures expérimentales pour 10 impulsions de K^- de 1400 à 1800 MeV/c avec un intervalle d'environ 50 MeV/c.

Enfin, la collaboration Collège de France - Saclay (C-S) à laquelle j'ai participé a temps plein nous a fourni 385.000 photographies prise dans la chambre de 2 m exposée à un faisceau de K^- issu du synchrotron à protons du C.E.R.N. Cette expérience destinée à explorer un domaine pauvre en données découpe la zone d'impulsion comprise entre 1,934 et 2,516 GeV/c en 7 parties espacées de 100 MeV/c.

B) Expérience réalisée en Angleterre (réf. 4).

C'est une collaboration Collège de France - Rutherford - Saclay (C.R.S.)(1) ; elle a utilisé la chambre de 180 ℓ de Saclay et le faisceau de K^- de NIMROD et nous a donné un total de 1.5 10^6 photographies pour 13 impulsions de K^- incident espacés de 50 MeV/c entre 1,26 et 1,84 GeV/c.

C) Expérience américaine (réf. 5).

Cette dernière (68-69) comprend des mesures pour 19 impulsions de K^- entre 1,1 et 1,7 GeV/c et résulte d'une exposition de la chambre à bulles de 25 pouces au faisceau de K^- issu du Bevatron de Berkeley donnant un total de 860.000 photographies.

Nous venons de donner une très brève description des expériences qui ont servi à notre analyse. Elles ont en commun le type de détecteur utilisé et par conséquent la méthode qui, partant du film, conduit à l'événemen est sensiblement la même pour toutes ; nous insisterons, toutefois sur les différences lorsqu'il y en aura.

---

(1) - Les sigles C.H.S., C.R.S., C.S. seront utilisés dans la suite de cet exposé pour ne pas alourdir inutilement le texte.

II - DEPOUILLEMENT DES FILMS - MESURE.

Les clichés sont examinés sur des tables de projection où l'on recherche les topologies intéressantes. La réaction étudiée ici se présente comme l'arrêt d'une trace incidente suivi de la désintégration d'une particule neutre $|\Lambda^\circ, K^\circ|$. Certains critères sont exigés pour retenir un événement sur un cliché, ces critères sont généraux :

- Le point d'interaction doit se trouver dans une zone dont la définition dépend de la chambre utilisée (fig. 1).
- Le vertex de désintégration doit être tel que les traces qui en sont issues atteignent les bords de la chambre en parcourant une certaine longueur minimale. Pour nous cette longueur était de 7 cm.
- La trace incidente ne doit pas s'écarter de la direction du faisceau de plus de 4 mm sur 40 cm de parcours.

Après cet examen les événements retenus sont mesurés sur des tables de mesure semi-automatiques (I.E.P.). La séquence de programmes utilisée ensuite est très classique même si les programmes d'outre-atlantique portent des noms différents. Ce sont des programmes de reconstruction géométrique des traces puis d'ajustement cinématique des événements.

Les résultats du programme de cinématique sont comparés pour chaque événement au cliché correspondant. Après cette comparaison nous retenons un événement si :

- la probabilité du χ^2 de l'ajustement est suffisante ($> 10^{-4}$).
- l'accord est bon entre l'ionisation des traces calculée et la noirceur de celles-ci. Cette comparaison étant qualitative.

En revanche si un événement ne donne lieu à aucun ajustement correct, nous décidons s'il doit être mesuré à nouveau, rejeté définitivement comme ne correspondant pas à la réaction étudiée ou enfin considéré comme rejet non définitif si la mesure est impossible : il s'agit alors d'un événement non complétement identifiable.

Ce traitement achevé,les quantités physiques importantes des événements bruts retenus après les deux types de sélection que nous venons de passer en revue, sont écrites sur bande magnétique et peuvent être dès lors analysées. Avant de laisser ce paragraphe nous examinerons les faisceaux de K^- utilisés.

Les faisceaux de K^- :

Les faisceaux de K^- construits au C.E.R.N. sont tous du même type, les mésons K^- sont produits par le bombardement d'une cible en beryllium interne au synchrotron puis de manière à séparer les K^- d'autres particules négatives (π^-, μ^-) les particules sont conduites jusqu'à la chambre à travers deux séparateurs électrostatiques.

Dans les faisceaux construits à NIMROD et à Berkeley les mésons K^- proviennent du bombardement d'une cible interne en cuivre et non en béryllium c'est la seule différence entre ces faisceaux et ceux du C.E.R.N.

Dans toutes les expériences c'est la mesure des événements à trois branches, baptisés désintégrations suivant le mode τ ($K^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-$), qui a permis d'obtenir avec précision la valeur de l'impulsion des traces incidentes.

En dépit du soin apporté à la construction d'un faisceau ce dernier contient des π et des μ provenant des désintégrations de K^- devant la chambre.

Une estimation globale de cette contamination peut être faite à l'aide du nombre de taus observés ou en effectuant un comptage de rayon δ. Ce type d'estimation effectué dans toutes les expériences conduit à une limite

supérieure de la contamination en (π + μ) comprise entre 5 et 10 %. Dans les expériences auxquelles nous avons participé nous avons tenu à connaître avec plus de précision le nombre de π^- présents dans le faisceau car, à la différence des μ, ils sont à l'origine de réactions qui peuvent être confondues avec des réactions induites par des K^- ; nous avons ainsi introduit, parmi les ajustements cinématiques essayés, des hypothèses de réaction induites par des π^- incidents. Compte tenu de la section efficace moyenne de ces réactions avec π^- incident du type $\pi^- p \to \Sigma^- K^+$ la limite supérieure du pourcentage de π présents était estimé à 3 ou 4 %.

La provenance de nos données, une centaine de points expérimentaux entre 1,5 et 2,5 GeV, est désormais claire et nous allons examiner maintenant l'attitude de chaque expérience vis-à-vis de la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$, ce qui revient à exposer les méthodes utilisées pour obtenir un lot propre d'événements correspondant à une réaction donnée.

III - BIAIS ET PONDERATION.

Dans une expérience de chambre à bulles où la séparation des réactions issues d'un même état initial à étudier ne se fait qu'à posteriori, il y a essentiellement deux types de biais, les biais à caractères géométriques dus au détecteur lui-même et les biais à caractères cinématiques dus à la réaction désirée. Les corrections à apporter et les pondérations résultantes sont désormais classiques et communes à toutes les expériences que nous avons citées. Nous en exposerons les principes en donnant quelques valeurs se rapportant à notre propre expérience. Cependant pour la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda^\circ$ il existe un problème traité différemment suivant les auteurs : il s'agit de l'ambiguïté entre la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda^\circ$ et $K^- p \to \pi^\circ \Sigma^\circ$. Nous lui accorderons une plus grande attention.

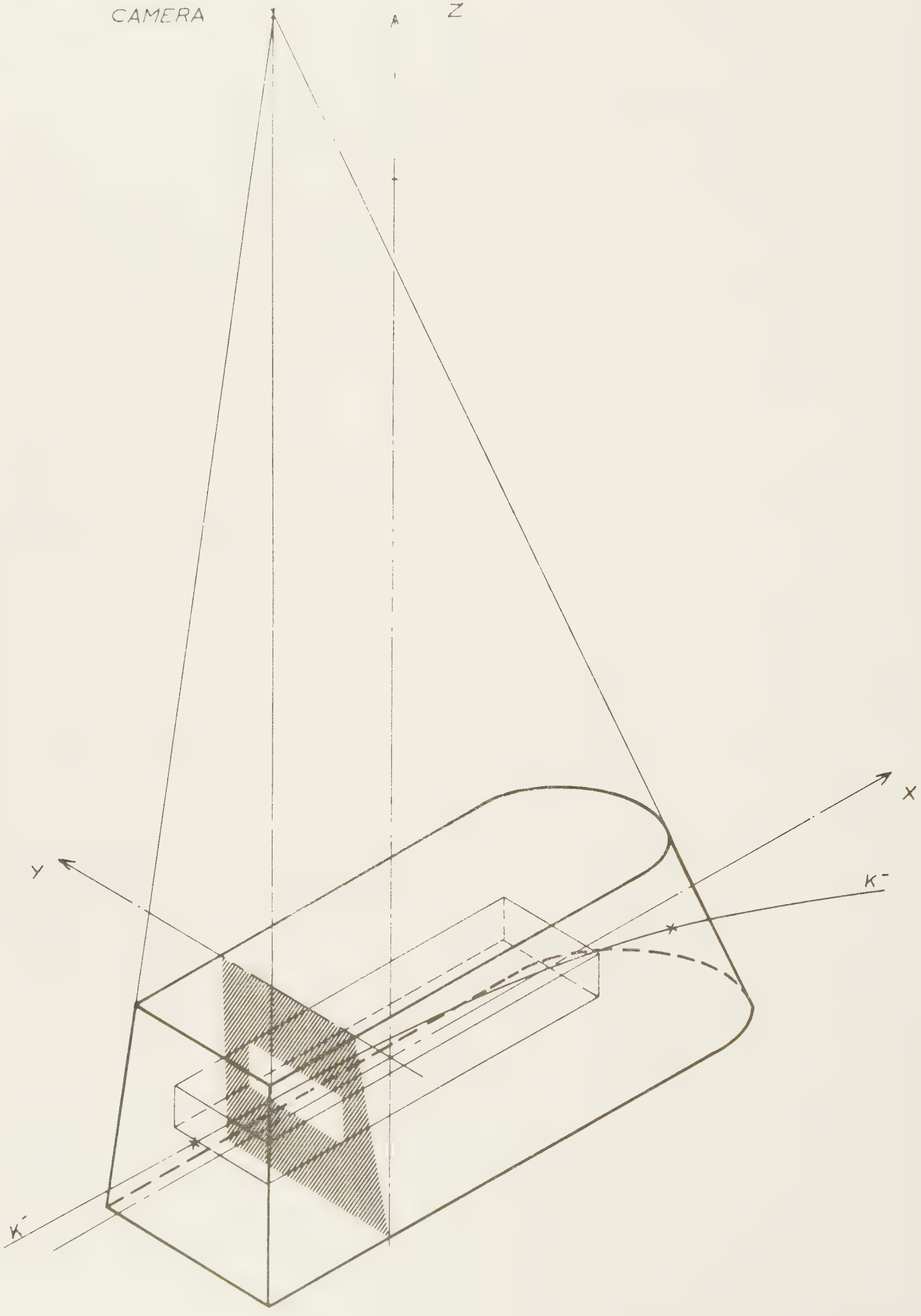


Fig. 1

A) Coupures géométriques.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il était nécessaire d'imposer certains critères de sélection pour les traces incidentes des interactions et pour les désintégrations.

Ainsi les points de désintégrations doivent vérifier les équations qui définissent le volume utile de la chambre (fig. 1). Dans notre expérience ce volume répond aux équations suivantes :

$$50 + \ell_{min} < Z < -\ell_{min} \qquad \ell_{min} = 7 \text{ cm.}$$

$$Y_1 = \frac{Z - Z_C}{Z_C - Z_{MIN}} (Y_C - \ell_m) + Y_C < Y < Y_2 = \frac{Z - Z_C}{Z_C} (Z + \ell_{min}) + Y_C$$

$$\frac{Z - Z_C}{Z_C - Z_{MIN}} (Y_M - \ell_{min} - 1) + X_C < X < \frac{Z - Z_C}{Z_C - Z_{MIN}} (\ell_{min} - 101) + X_C - R + \sqrt{R^2 - (Y_1 + R - Y)^2}$$

Ce volume fiduciel assure une longueur minimale projetée par les traces secondaires ℓ_{min} et une longueur potentielle ℓ_p supérieure à 15 cms en moyenne. La longueur potentielle étant définie comme la distance entre le vertex et les bords de la chambre dans la direction de la particule. Nous savons que les désintégrations proches de l'apex sont difficiles à voir. Nous sommes donc conduits aussi à éliminer les événements pour lesquels la "trace" de la particule neutre (Λ°) est inférieure à une longueur minimale projetée L_o. Cette longueur, suivant les expériences, varie entre 2 et 4 mm.

Dans de telles conditions la probabilité d'observation d'une désintégration d'une particule d'impulsion p, de masse m et de vie moyenne τ est :

$$f = \exp\left[-\ell_o/L\right] - \exp\left[-\ell_p/L\right]$$

avec $\ell_o \cos\lambda = L_o$ où λ est l'angle de plongée de la particule,

ℓ_p = longueur potentielle,

$L = \frac{Pc\tau}{m}$ parcours moyen de désintégration de la particule.

Les événements conservés devront donc être affectés du poids

$W_1 = 1/f.$

B) Coupures cinématiques.

Dans la désintégration $\Lambda \rightarrow p\ \pi^-$ il peut arriver que le proton s'arrête ou que le π^- se désintègre tout près du vertex, dans l'un ou l'autre de ces deux cas la désintégration n'est pas mesurable ou la reconstruction cinématique n'est pas possible.

Cette cause de biais concerne les événements pour lesquels la ou les traces chargées issues du vertex de désintégration d'un Λ° sont de l'ordre du cm. Dans la pratique nous avons choisi d'éliminer les événements lorsque le parcours du proton était inférieur à 1 cm ou celui du pion inférieur à 2 cms. Ces valeurs correspondent à des impulsions minimales de 140 MeV/c pour un proton et de 45 MeV/c pour un pion. Soit δ l'angle de désintégration du Λ° dans son système propre, fonction des énergies du pion ou du proton dans ce système la coupure que nous avons effectuée porte alors sur les événements avec $\cos\delta < \cos\delta_C$. La distribution des $\cos\delta$ étant uniforme nous avons affecté chaque événement conservé du poids $W_2 = \frac{2}{1 - \cos\delta}$.

Finalement un événement de la réaction $K^- p \rightarrow \pi^\circ \Lambda$ sera affecté d'un poids $W = W_1 * W_2 * \alpha^{-1}$, α étant le coefficient de visibilité du Λ° c'est-à-dire le pourcentage de Λ° se désintégrant dans le mode chargé.

Un exemple quantitatif de cette suite de coupure et de pondérations nous est fourni par les expériences réalisées en collaboration avec le Collège de France :

Expérience	N^bre événements bruts	N après coupures	%	Poids associé
C.R.S.	17953 (Λ° + neutres)	15851	$\sim$ 12	1,17
C.S.	10524	9378	$\sim$ 10	1,10

C) Contamination par les Σ°.

Si la réaction $K^- p \to \Lambda \pi^\circ$ est bien séparée de la réaction $K^- p \to \Lambda^\circ$ + neutres au cours de l'ajustement cinématique par le programme GRIND, en revanche il reste une ambiguïté avec la réaction $K^- p \to \Sigma^\circ \pi^\circ$ où le Σ° se désintègre dans la voie $\Lambda^\circ \gamma$ cette désintégration de type électromagnétique est en effet assez rapide pour que le Λ° pointe sur l'apex de l'interaction.

Lorsque dans une même expérience les sections efficaces des réactions $K^- p \to \Sigma^+ \pi^-$ ont été mesurées, une estimation de la contamination par les Σ° est réalisée à l'aide de l'inégalité triangulaire imposée aux sections efficaces par la conservation de l'isospin :

$$\sigma_{\Sigma^\circ \pi^\circ} \leq \frac{1}{4} \left[\sqrt{\sigma_{\Sigma^+ \pi^-}} + \sqrt{\sigma_{\Sigma^- \pi^+}} \right]^2$$

- L'expérience de Berkeley a utilisé cette relation pour donner une contamination maximale de l'ordre de 5 %. Les auteurs de cette expérience ont ignoré cette contamination dans leur lot final d'événements.
- Les deux expériences réalisées au C.E.R.N. entre 436 et 1200 MeV/c ont voulu donner un traitement plus rigoureux à la séparation Λ° - Σ°.

Pour chaque énergie un ajustement par moindre carrés fut effectué sur chaque spectre de masse carrée manquante au Λ° les paramètres libres étant la proportion de chaque état final possible. La fonction utilisée pour ajuster la distribution de masse carrée étant :

$$F = \alpha_1 \, (\pi^\circ \gamma) + \alpha_2 \, f_{\pi^\circ} + \alpha_3 \, f_\eta + \alpha_4 \, f_{\pi^\circ \pi^\circ}$$

où f_{π°, f_η sont des distributions gaussiennes centrées sur les masses carrées du π° et du η, $(\pi^\circ \gamma)$ représente la distribution rectangulaire du spectre de masse carrée π° - γ, enfin $f_{\pi^\circ \pi^\circ}$ décrit l'espace de phase π° π°. Un tel ajustement a permis d'obtenir pour chaque énergie la proportion de chaque type d'événements.

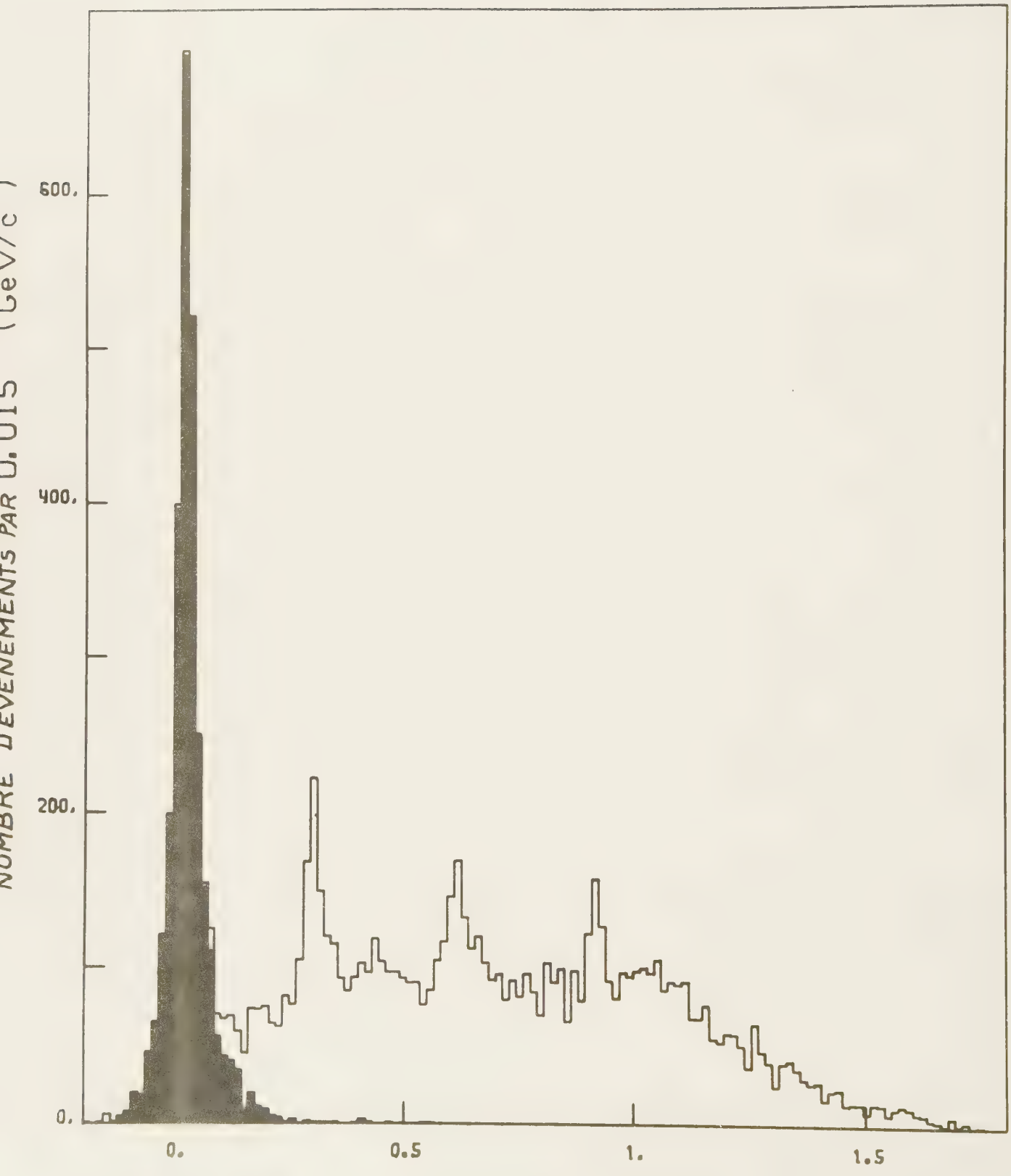

NOMBRE D'EVENEMENTS PAR 0.015 (GeV/c²)
600.
400.
200.
0.
0.
0.5
1.
1.5
Masse manquante carrée au Λ (GeV/c²)²

Fig. 2

La contamination en Σ° était alors traitée en écrivant :

$$N(\Lambda\ \pi^\circ) = N\left|MM^2 < 4\ m^2\ \pi^\circ\right| - \alpha\ N\ (\Sigma^\circ\ \pi^\circ)$$

où $\alpha = \dfrac{4\ m^2\ \pi^\circ - M^2_{(\pi^\circ\ \gamma)min}}{M^2_{(\pi^\circ\ \gamma)max} - M^2_{(\pi^\circ\ \gamma)min}}$ est la fraction du spectre $\pi^\circ\ \gamma$ en dessous de $4\ m^2\pi^\circ$.

- Les expériences réalisées avec la participation du Collège de France ont reçu un traitement différent.

Sur la distribution de masse carrée manquante au Λ° nous constatons que le pic centré à la valeur de la masse carrée du π° est dissymétrique en faveur des masses élevées, ce qui est attribuable à la contamination. En faisant l'hypothèse que la distribution de masse manquante au V° doit être symétrique par rapport à la masse de cette particule, nous avons adopté la séparation suivante :

(I) - Les événements pour lesquels la masse carrée manquante au $\Lambda^\circ(MM^2)$ répond à l'inégalité suivante :

$$\left|MM^2 - m^2\ \pi^\circ\right| < \delta$$

où δ est l'imprécision sur la masse carrée, seront attribués à $K^-\ p \rightarrow \pi^\circ\ \Lambda$.

(II) - Les événements à droite du pic pour lesquels la différence $MM^2 - m^2\ \pi^\circ$ est supérieure à un écart standard δ sont éliminés.

(III) - Enfin les événements à gauche du pic qui vérifient $\left|MM^2 - m^2\pi^\circ\right| > \delta$ et qui correspondent avec certitude à des événements $K^-\ p \rightarrow \pi^\circ\ \Lambda$ auront un poids double de manière à compenser l'élimination des événements à droite du pic (fig. 2).

Impulsion du K^- incident GeV/c	N_- événements $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$	Poids total	Poids géométrique
1,262	209	1,316	
1,316	268	1,257	
1,368	283	1,250	
1,415	240	1,228	
1,462	585	1,289	
1,514	344	1,268	
1,546	337	1,276	$\sim$ 1,18
1,606	311	1,235	
1,653	410	1,319	
1,705	189	1,339	
1,741	145	1,296	
1,799	141	1,255	
1,842	120	1,237	
1,934	489	1,286	
2,031	356	1,248	
2,134	474	1,257	
2,235	361	1,254	$\sim$ 1,10
2,331	159	1,264	
2,412	61	1,321	
2,516	165	1,312	

Tableau I

Ce type de séparation reposant sur l'hypothèse de symétrie du pic, nous avons vérifié celle-ci sur le lot I. Nous avons aussi défini nos trois lots en prenant successivement $\delta = 3/4\ \Delta MM^2$, $3/2\ \Delta MM^2$ ce qui ne modifie pas le nombre total d'événements pondérés.

Toutes ces précautions prises, nous avions un poids total réparti de la manière suivante :

$$W_I = W_1\ W_2\ (\alpha^{-1})$$
$$W_{II} = 0$$
$$W_{III} = 2 * W_1 * W_2\ (\alpha^{-1})$$

Le tableau I nous donne le nombre d'événements de la réaction $K^-\ p \rightarrow \pi^\circ\ \Lambda$ avec le poids total à chaque énergie pour les deux expériences réalisées avec la participation du Collège de France. Dans son lot définitif l'expérience C.H.S. compte environ 350 événements par énergie attribuables à la réaction $K^-\ p \rightarrow \pi^\circ\ \Lambda$.

-:-

C H A P I T R E I I

-:-

REPRESENTATION DES DONNEES.
ESTIMATIONS.

-:-

I - SECTIONS EFFICACES.

Pour évaluer la section efficace totale de la réaction étudiée tous les auteurs ont procédé de la même manière par comparaison du nombre d'événements ajustés à la réaction, au nombre de désintégrations suivant le mode tau des K^- incidents. En effet la section efficace d'une réaction donnée s'exprime au moyen de la formule :

$$\sigma_r = \frac{N_i}{L} \times \frac{1}{\rho A \mathcal{N}}$$

où le produit $A\mathcal{N}$ est le nombre de protons de la cible par unité de volume, ρ est la densité de la cible et L représente la longueur totale de K^- susceptibles d'interagir dans la chambre et s'exprime en fonction du nombre de désintégration en 3 pions chargés (mode tau) :

$$L = n_\tau * \lambda * \frac{1}{t}$$

où λ est le libre parcours moyen d'un K^- et t le rapport d'embranchement dans le mode tau. Finalement la section efficace est bien obtenue en fonction du nombre d'événements et du nombre de tau :

$$\sigma_r = \frac{N_i}{n_\tau} \times \frac{t}{\lambda} \times \frac{1}{\rho A \sqrt{}}$$

En raison de notre méthode de dépouillement des clichés et de pondération des événements, le nombre N_i d'événements figurant au numérateur doit être corrigé :

$$N_i = N_b \left(1 + \frac{n}{N_T} \right) \bar{W}_T$$

avec N_b = Nombre d'événements bruts correspondant à la réaction étudiée et présents sur le D.S.T.

n = Nombre d'événements mis en rejet non définitif et à répartir sur le nombre total d'événements (N_T) du type étudié.

enfin $\bar{W}_T$ est le poids moyen affecté à chaque événement pour tenir compte des coupures effectuées et des désintégrations dans le mode neutre.

L'erreur mesurée sur la section efficace, uniquement statistique, est donnée par :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N_b} + \frac{1}{N_\tau}}$$

Nous présentons sur le tableau II les sections efficaces calculées pour 7 impulsions de K^- qui correspondent à notre propre expérience, et nous reportons aux articles concernant les autres expériences pour les sections efficaces de la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ entre 440 et 1840 MeV/c (réf. 1, 2, 4, 5).

P_{K^-} (GeV/c)	Longueur de K^- Km	Nombre d'événements (pondérés)	$\sigma \pm \Delta\sigma$ mb
1,934	442	629,6	$0,592 \pm 0,029$
2,031	398	442,4	$0,476 \pm 0,027$
2,135	440	596,6	$0,558 \pm 0,028$
2,234	467	452,9	$0,407 \pm 0,023$
2,331	232	202,6	$0,339 \pm 0,029$
2,412	87	79,3	$0,377 \pm 0,054$
2,516	252	218,2	$0,362 \pm 0,031$
Total	2 318	2 621,6	

Tableau II

II - DISTRIBUTIONS ANGULAIRES ET POLARISATIONS.

A -

Dans une réaction du type $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$, l'état final est caractérisé par la distribution angulaire de diffusion et par la polarisation du baryon produit qui se manifeste par une asymétrie dans la distribution angulaire des produits de désintégration de ce baryon par rapport à la normale au plan de production.

Dans notre cas le baryon final est un Λ° de spin 1/2 qui se désintégre en $p\,\pi^-$, la distribution angulaire de désintégration en l'absence de polarisation du proton initial est alors donnée par

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\,(1 + P(\theta) \times \alpha \times \hat{p} \times \vec{n})$$

où α est le pouvoir analyseur de la désintégration, $\hat{p}$ le vecteur unitaire parallèle au proton dans le système du Λ°, $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal au plan de production et $P(\theta)$ la polarisation du Λ°. Le pouvoir analyseur ou paramètre d'asymétrie α du Λ° vaut .645 (réf. 6), et par conséquent nous pouvons évaluer P à l'aide de la densité de probabilité f.

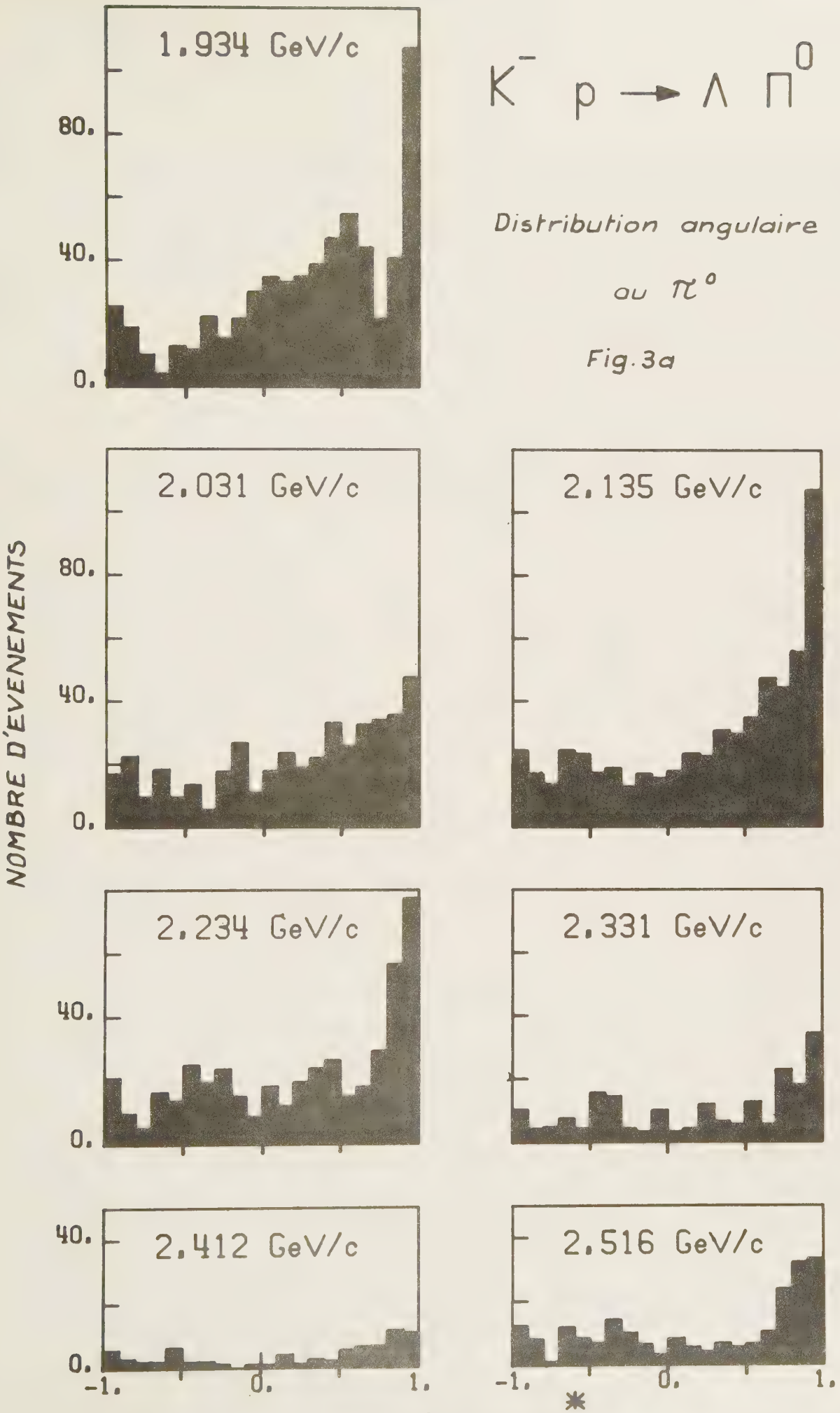
Posons $\cos\beta = \hat{p}.\vec{n}$, la valeur moyenne de $\cos\beta$ s'écrit :

$$\langle \cos\beta \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} f \cos\beta \, d(\cos\beta)}{\int_{-1}^{+1} f \, d(\cos\beta)} = \frac{\alpha P}{3}$$

Nous en déduisons $P(\cos\theta_\pi)$ en estimant $\langle\cos\beta\rangle$ à l'aide de la méthode des moments, par : $\langle\cos\beta\rangle = \dfrac{\sum_i \cos\beta_i}{N}$

d'où $$P = \frac{3}{\alpha}\,\frac{\sum_i \cos\beta_i}{N} \pm \Delta P$$

avec $\Delta P = \sigma_{\cos\beta} = \dfrac{9}{\alpha N}\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{\alpha^2 P^2}{9}\right]^{1/2} = \left[\dfrac{3 - \alpha^2 P^2}{\alpha^2 N}\right]^{1/2}$



$K^- p \rightarrow \Lambda \Pi^0$

Distribution angulaire

au π^0

Fig. 3a

POLARISATION DU Λ DANS LA REACTION
K⁻ p → Λ Π⁰
1,934 GeV/c
2,031 GeV/c
2,135 GeV/c
2,234 GeV/c
2,331 GeV/c
2,412 GeV/c
2,516 GeV/c
POLARISATION
COS θ*
1.
0.
-1.

Fig 3b

Cette méthode pour évaluer $P(\cos\theta_{\pi^\circ})$ a été employée dans toutes les expériences ; nous présentons sur les fig. 3a,b les distributions angulaires du π° dans le système du centre de masse et la polarisation $P_{\Lambda^\circ}(\cos\theta_{\pi})$ pour les 7 énergies de la collaboration C.S.

B) Coefficients A_ℓ, B_ℓ.

Dans le formalisme des réactions du type $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$ sur lequel nous reviendrons dans la suite (cf. chapitre III) nous savons que l'amplitude de transition peut s'exprimer en fonction des amplitudes complexes des ondes partielles $T_{j\ell}$ correspondant pour un ℓ donné à deux valeurs du moment angulaire total $j = \ell + 1/2$, $j = \ell - 1/2$. Par conséquent il est possible de représenter la variation en fonction de l'énergie de la section efficace différentielle et de la polarisation à l'aide d'un développement en série de fonctions. Habituellement les fonctions utilisées forment une famille orthogonale sur le segment $[-1, +1]$ et sont les fonctions de Legendre

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \lambda^2 \sum_\ell A_\ell \, P_\ell(\cos\theta)$$

$$\vec{P} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lambda^2 \sum_\ell B_\ell \, P^1_\ell(\cos\theta) \, \vec{n} \qquad \lambda = \frac{\hbar}{P_{CM}}$$

Les coefficients A_ℓ, B_ℓ ainsi définis constituent un ensemble de paramètres permettant de représenter les distributions angulaires et la polarisation à l'aide de fonctions continues de l'énergie.

Au cours de l'analyse qui va suivre, nous aurons constamment à utiliser ces coefficients, il est donc très important de savoir comment ils ont été calculés, avec quel degré de confiance, et jusqu'à quel ordre.

Il existe trois méthodes pour obtenir les coefficients A_ℓ, B_ℓ deux d'entre elles consistent en un ajustement des données expérimentales, la troisième est une méthode de moments qui fournit une estimation directe des coefficients cherchés.

Le groupe de Berkeley a effectué, pour sa part, un ajustement par moindre carrés qui nécessite un regroupement des événements pour maintenir un minimum de 6 événements par canal dans les distributions angulaires et environ 40 événements dans les polarisations. L'inconvénient d'une telle méthode est qu'elle dépend fortement du mode de regroupement.

Notre expérience a employé une méthode de maximum de vraisemblance, utilisant toute l'information disponible pour chaque événement, sur laquelle nous reviendrons dans la troisième partie.

La méthode la plus utilisée (réf. 1 à 4) est la méthode des moments, nous en donnons les principes.

Lorsque la densité de probabilité des quantités observées est exprimable en termes de fonctions orthogonales comme c'est le cas ici :

$$f(X) = A_o + \sum_{\ell} A_\ell P_\ell (X) \qquad \text{où } X = \cos\theta$$

L' espérance mathématique des fonctions de base s'écrit :

$$\begin{aligned} E\left[P_\ell(X)\right] &= \int P_\ell(X)\, f\, dX \\ &= \int P_\ell(X)\, A_o\, dX + \sum_{k=1}^{\ell} A_k \int P_\ell\, P_k\, dX \\ &= A_\ell \end{aligned}$$

Et nous savons alors que :

$$a_\ell = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} P_\ell(X)$$

est un estimateur sans biais de l'espérance mathématique, c'est-à-dire de A_ℓ.

En pratique cette méthode fournit les coefficients des développements à l'aide des formules suivantes :

$$A_\ell / A_o = (\ell + 1/2) \sum_{i=1}^{N} W_i \, P_\ell(\cos \theta_i) / \sum_i W_i$$

$$B_\ell / A_o = \frac{3 \ell (\ell + 1)}{\alpha (2 \ell + 1)} \sum_{i=1}^{N} \frac{W_i \, P'_\ell(\cos\theta_i) \cos \beta_i}{\sum_i W_i}$$

Dans le cas d'ajustement l'ordre maximum des développements est déterminé par la qualité de l'ajustement, et dans le calcul par la méthode des moments, on arrête le développement lorsque le dernier coefficient calculé A_ℓ ou B_ℓ est compatible avec zéro. Dans tous les cas cette méthode pour fixer l'ordre maximum peut paraître sinon arbitraire tout du moins subjective et nous verrons plus loin (cf. deuxième partie) comment améliorer cette estimation de l'ordre auquel on doit s'arrêter en utilisant une méthode de maximum de vraisemblance.

Sur les figures 4a, 4b nous présentons les coefficients A_ℓ, B_ℓ en fonction de l'énergie depuis 1540 MeV pour les expériences que nous avons déjà citées.

-:-

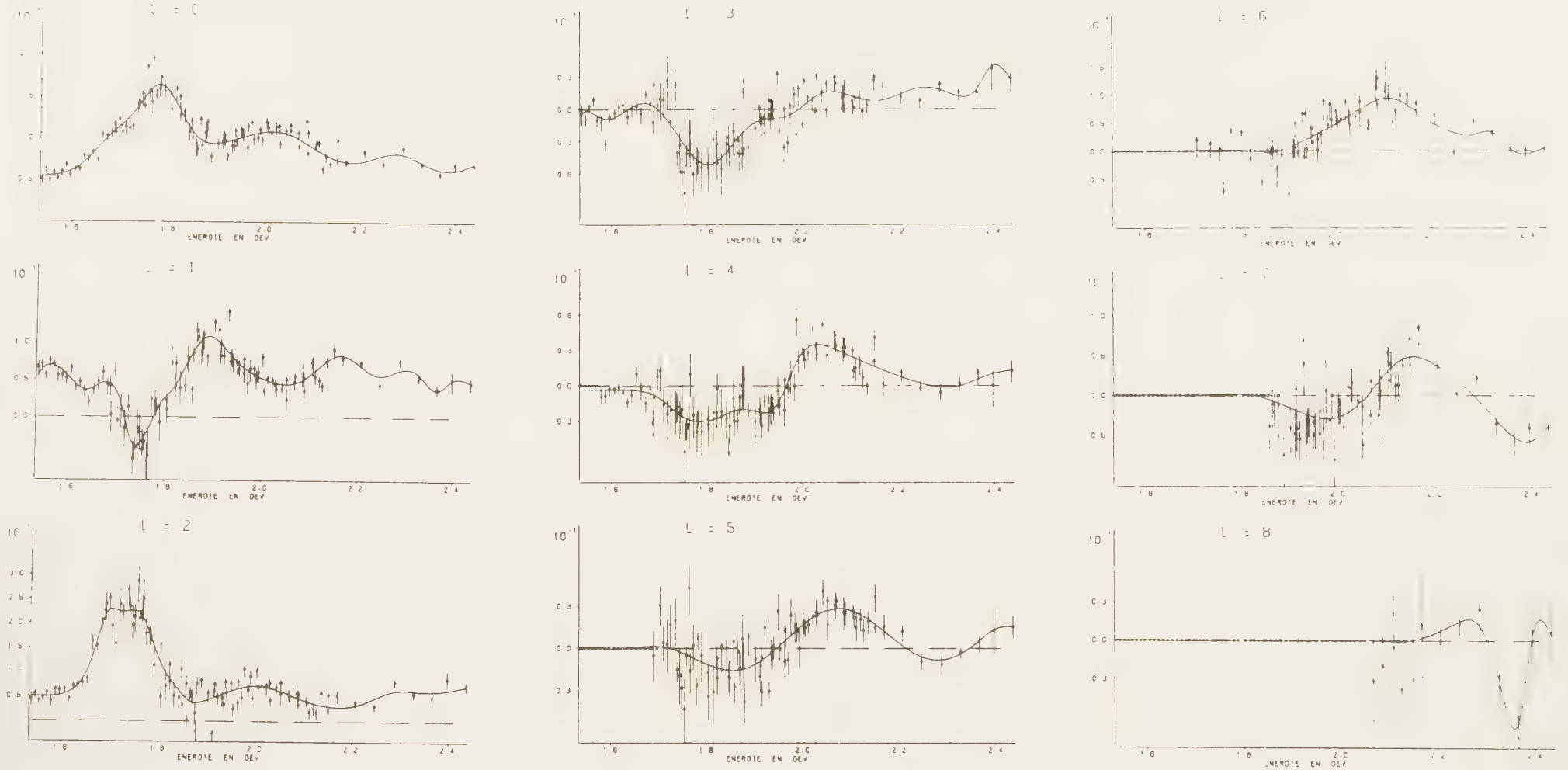


Fig. 4 a

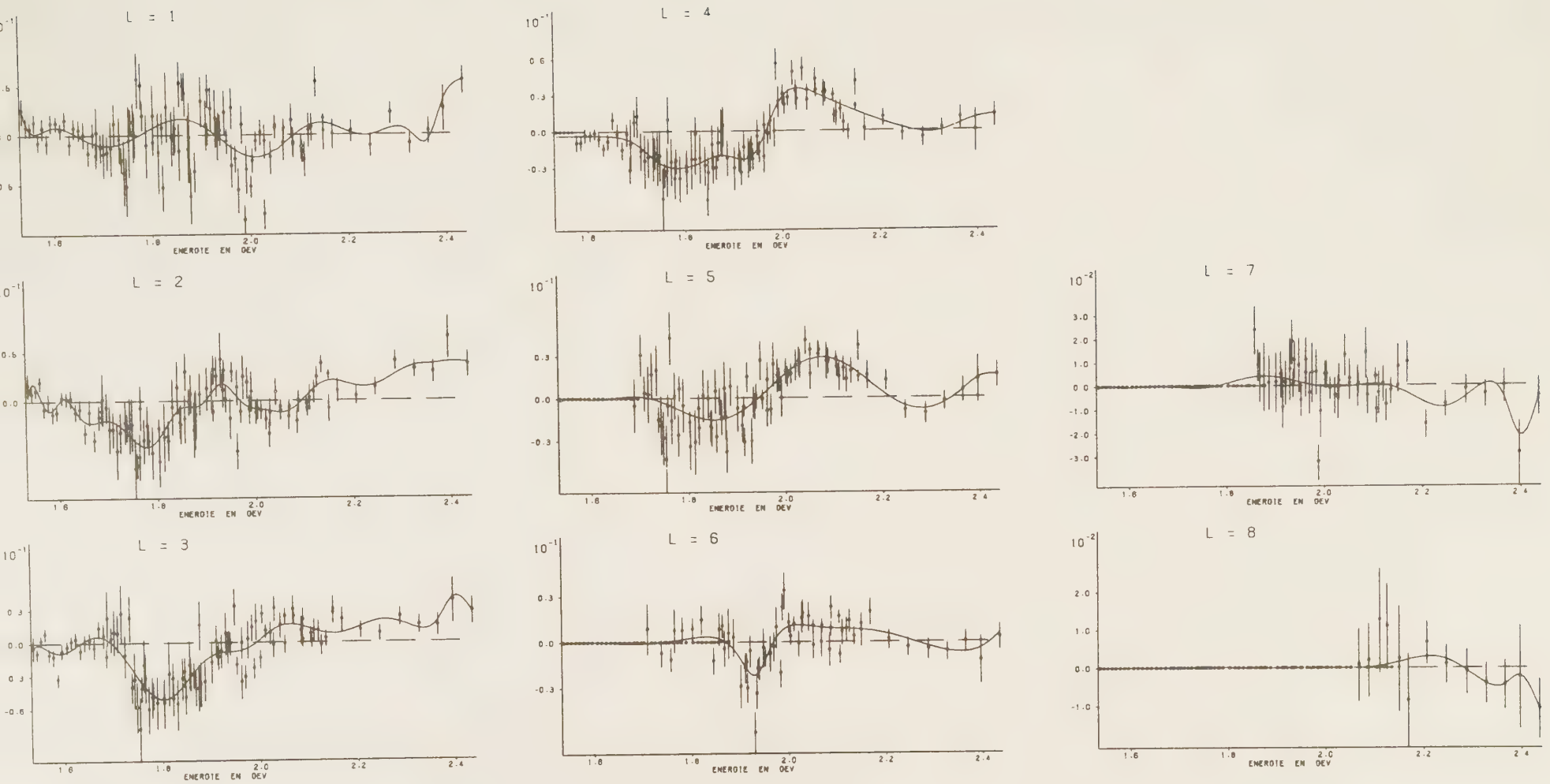


Fig. 4b

CHAPITRE III

-:-

RESULTATS CONNUS.

-:-

Avant d'entamer la partie essentielle de ce travail concernant l'étude de la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ nous voulons achever notre revue de la situation expérimentale en donnant une liste des analyses déjà publiées et en examinant, à travers elles, l'interprétation des structures vues dans les amplitudes d'ondes partielles.

Dans ce but, nous présenterons un tableau III donnant les caractéristiques essentielles des états instables présents dans les ondes d'isospin 1, depuis S_1 jusqu'à G_9 (en notation spectroscopique L_{2J}) et parmi ceux-ci nous distinguerons les résonances bien établies $|Y_1^*|$ des résonances méritant confirmation ou même simplement suggérées.

I - ANALYSES EXISTANTES.

Les analyses présentées depuis une dizaine d'années pour cette réaction issue d'expériences de formation sont séparables en trois groupes :

les analyses dépendantes de l'énergie, les analyses indépendantes de l'énergie et les analyses dépendantes d'un modèle.

Dans le premier groupe, et chronologiquement, nous trouvons les analyses réalisées par Smart à Berkeley (réf. 5), par les physiciens des collaborations C.E.R.N.-Heidelberg-Saclay, Collège de France-Rutherford Laboratory-Saclay, par Van Horn à Berkeley (réf. 1-5) et enfin par les auteurs de la collaboration Collège de France-Saclay.

Ces analyses sont toutes identiques dans leur principe et nous y reviendrons dans la suite de l'exposé. Dès maintenant montrons qu'elles peuvent avoir des formes différentes ; en effet, une des idées de base de ce type d'analyse est le paramètrage des amplitudes en fonction de l'énergie. Si, pour une amplitude résonnante, ce paramétrage est identique d'un auteur à l'autre, il n'en va pas de même pour une amplitude non résonnante baptisée amplitude de fond.

Paramétrage des amplitudes de fond.

α) Analyses effectuées à Berkeley.

$$T_B = (A + B\,k + C\,k^2)\ \exp i\ |D + E\,k + F\,k^2| \qquad \text{si} \quad A + B\,k + C\,k^2 > 0$$

$$T_B = 0 \qquad \text{si} \quad A + B\,k + C\,k^2 < 0$$

avec k = impulsion des particules initiales dans le Système de Centre de Masse

β) Analyses du groupe C.H.S.

$$T_B = a + b\ (P_k^-)$$

où P_k^- est l'impulsion du K^- incident exprimée en GeV/c
et a, b deux paramètres complexes.

γ) Analyses du groupe C.S.

$$T_B^{JL} = \sum_0^N \alpha_n^{J,L} P_n(X)$$

la variable X est une fonction linéaire de l'impulsion incidente $X = C_1 + C_2 P_k$- qui vaut -1 ou +1, aux bornes inférieures et supérieures de la zone considérée.

Les analyses indépendantes de l'énergie consistent en un ajustement des données à chaque énergie. Dans la pratique on laisse varier chaque onde partielle soumise aux contraintes d'unitarité et parmi un nombre fini de solutions acceptables la meilleure solution retenue est celle qui assure la continuité en énergie.

La principale analyse de ce type fut réalisée par Armenteros (réf. 2) avec les données fournies par la collaboration C.H.S. entre 400 et 1200 MeV/c.

Plus récemment, une analyse semi-indépendante d'énergie, a été effectuée par Baillon (réf. 7), couvrant une zone d'énergie comprise entre 1550 et 2150 MeV.

Enfin, dans la dernière catégorie nous trouvons une analyse due à Kim (réf. 8), qui utilise les données disponibles de 0 à 1226 MeV/c et réalise un ajustement en employant le formalisme de la matrice K (réf. 9). Ces trois dernières années deux analyses ont été publiées l'une par Langbein et Wagner (réf. 10) semi-indépendante d'énergie qui a donné lieu à certaines controverses dont nous reparlerons, l'autre réalisée par un groupe anglais Lea-Martin-Moorhouse-Oades, connue sous le sigle L.M.M.O. (réf. 12), cette dernière est une analyse à voies couplées dépendante de l'énergie, mais utilisant le formalisme de la matrice K. Nous ne détaillerons pas ce type d'analyse dépendante d'un modèle.

II - RESULTATS. RESONANCES Y_1^* FORMEES DANS LA VOIE $\Lambda\pi^\circ$.

Les diverses analyses dont nous venons de donner une liste s'accordent sur l'existence d'un certain nombre de résonances mais, en revanche, soit suggèrent de nouveaux états résonnants, soit présentent quelques différences entre les caractéristiques de telle ou telle résonance.

Dans l'onde S_1 la seule résonance considérée comme établie est le $\Sigma(1750)$, deux autres états sont suggérés, l'un à 1620 MeV l'autre à 2000 MeV. La situation est encore plus délicate pour l'onde P_1, en effet malgré la suggestion de deux états $\Sigma(1620)$, $\Sigma(1880)$ aucun n'est encore vraiment considéré comme sûr. Vers 1840 et 2080 MeV deux structures dans l'onde P_3 mériteraient d'autres confirmations. A ces deux états il faut ajouter un P_3 (2140) mis en évidence dans l'analyse de la collaboration C-S et qui pourrait tout aussi bien être le $P_3(2080)$ proposé par Litchfield (Réf. 11).

Dans l'onde D_3 le $\Sigma(1660)$ est sûr, le $\Sigma(1940)$ est considéré comme établi, mais la détermination de sa masse réelle est encore très imprécise et peut varier entre 1860 et 1950 MeV.

Pour les ondes D_5, F_5, F_7, l'accord semble bien meilleur entre les analyses, les résonances présentes dans ces ondes sont les $\Sigma(1765)$, $\Sigma(1915)$ et $\Sigma(2030)$ qui apparaissent dans notre tableau avec les nombres quantiques des tables de Rosenfeld (réf. 6).

Enfin dans l'onde G_9 nous avons proposé une résonance vers 2200 MeV qui correspondrait à la structure vue en section efficace et prévoyant un $\Sigma(2250)$ (réf. 3).

Ce bref examen des résonances établies ou suggérées est rappelé en détail dans le tableau III, où nous présentons pour chaque état résonnant son spin, sa parité, les masses théoriques et expérimentales qui lui sont attribuées (en MeV), sa largeur (en MeV) et son rapport d'embranchement $t = \sqrt{\frac{\Gamma_{\bar{K}N} \Gamma_{\Lambda\pi^\circ}}{\Gamma_T}}$ dans le canal $\Lambda\,\pi^\circ$.

Onde	J^P	M_T (en MeV)	M_{exp} (en MeV)	Γ (MeV)	t	Auteurs - Références
S_{11}	$1/2^-$	1620	1620	40	.46	KIM (réf. 8)
			1630	65		Langbien-Wagner (réf. 10)
			1650	100	.26	C.H.S. (réf. 1-2)
		1750	1730	80	.25	C.H.S. (réf. 2)
			1780	140	-.12	C.H. (Baillon) solution 1 (réf. 7).
			1700	66	-.13	Van Horn (réf. 5)
			1700	160	-.13	Baillon, solution 2 (réf. 7)
			1790	50	.01	KIM
			1790	100	-.3	Langbein-Wagner
		2000	2004	116	.07	Van Horn
P_{11}	$1/2^+$	1620	1670	50	~ 0	KIM
			1621	52	.05	L.M.M.O (réf. 12)
			1668	230	$\pm$.12	Van-Horn
			1660	80	-.05	C.H. (Baillon) Sol. 1
			1630	270	.10	Clayton (Berkeley) (réf. 5)
		1880	1882	222		Smart (UCRL 17956) (réf. 5)
			1898	222		L.M.M.O.
			1920	170	-.14	Litchfield (C.R.S.) (réf. 11)
			1985	220	.05	Van Horn
			1960	260	-.12	C.H. (Baillon) Sol. 1
P_{13}	$3/2^+$	1840	1925	200	.06	Van Horn
			1840	120		Langbein-Wagner
		2080	2070	200	-.09	Litchfield
			2120	240	-.13	C.H.(Baillon) Sol.1-2
			2140	180	.19	C.S.

Onde	J^P	M_T (en MeV)	M_{exp} (en MeV)	Γ (MeV)	t	Auteurs - Références
D_{13}	$3/2^-$	1670	1670	35-60	.1	P.D.G. (réf. 6)
		1940	1949	160	-.05	Van Horn
			1940	280	-.14	Litchfield
			1850-1900	200	-.08	Clayton
			1865	109		L.M.M.O.
D_{15}	$5/2^-$	1765	1765	120	$\sim$ .25	P.D.G.
		2250	2260	100	.12	C.S.
F_{15}	$5/2^+$	1915	1900-1930	50-120	$\sim$ .09	P.D.G.
		?	2250	192	-.16	Van Horn
F_{17}	$7/2^+$	2030	2020-2040	140	.20	P.D.G.
G_{19}	$9/2^-$	2250	2215	60	-.09	C.S.

Tableau III

N.B. - Dans la suite de notre exposé nous omettrons l'indice d'isospin et le coefficient de Clebsch-Gordan reliant l'amplitude d'isospin à l'amplitude de réaction

$$T_{I=1} = \sqrt{2}\ T_{\Lambda\pi^\circ}$$

Nous considérerons l'amplitude d'isospin 1.

D E U X I E M E P A R T I E

-:-

ZEROS ET ONDES PARTIELLES

-:-

PREAMBULE.-

Les données expérimentales concernant la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ couvrent à peu près uniformément une zone d'énergie disponible dans le centre de masse comprise entre 1540 et 2450 MeV où le nombre d'état résonnants ou présumés résonnants est important. Or, dans la première partie nous avons montré une situation qui, en fin de compte, n'est pas aussi claire qu'il serai souhaitable.

Barrelet en 1970 a montré l'intérêt qu'il y avait à étudier les zéros des amplitudes de transition (réf. 13). Dans cette seconde partie nous allons rappeler les notations dues à Barrelet, et, nous développerons un formalisme d'analyse en ondes partielles à l'aide des zéros de l'amplitude pour les réactions $0^- 1/2^+ \to 0^- 1/2^+$.

-:-

C H A P I T R E I

-:-

FORMALISME

-:-

Dans l'état actuel de nos connaissances la compréhension des processus d'interactions fortes passe par l'étude de l'amplitude de diffusion exprimée en fonction de l'énergie ($\sqrt{S}$) et de l'angle de diffusion (θ).[1]

La conservation du moment angulaire nous permet de décomposer cette amplitude totale suivant les amplitudes d'ondes partielles (notées $L_{I,2J}$), le problème qui se pose à nous est donc de déterminer ces amplitudes à partir des résultats expérimentaux.

I - AMPLITUDES DE TRANSVERSITE.

Pour décrire une réaction à deux corps du type $0^- \; 1/2^+ \rightarrow j_1 j_2$, où j_1 est entier et j_2 demi-entier, dans la plupart des cas on utilise soit un repère d'hélicité, dans ce cas l'axe de quantification est porté par la direction de l'une des particules produites dans le centre de masse, soit un repère de transversité l'axe de quantification est alors porté par la normale $\vec{n}$ au plan de production (fig. 5) orientée suivant la convention de Bâle :

---

(1) - Dans notre cas l'angle de diffusion sera noté θ et désignera l'angle formé dans le système du centre de masse par le K^- et le π^0

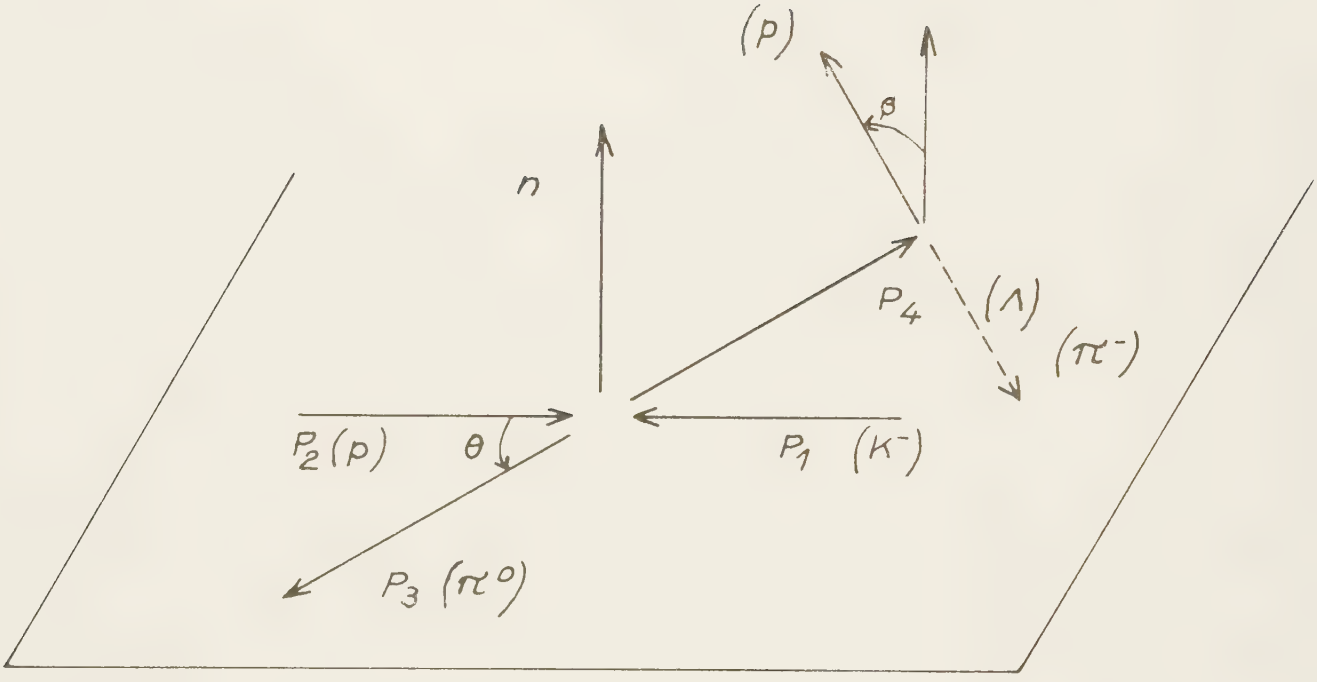


Fig. 5

$\vec{n} = \dfrac{\vec{p}_1 \times \vec{p}_3}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_3|}$. Dans la suite de notre exposé nous utiliserons les amplitudes de transversité, chaque repère de transversité se déduisant l'un de l'autre de façon simple par une transformation de Lorentz pure.

Dans une réaction à deux corps les amplitudes seront définies par :

$$T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}(\theta) = \langle |p_3|\ m_1 | \langle |p_4|\ m_2 |\ T\ | |p_1| \rangle\ |\ |p_2|\ \varepsilon \rangle$$

où m_1, m_2, ε sont les projections des spins suivant l'axe de quantification choisi et θ est l'angle de diffusion dans le système du centre de masse défini par $\cos\theta = \dfrac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_3|}$.

En introduisant les états propres de J, J_z, L, S nous obtenons le développement en ondes partielles suivants :

$$T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}(\theta) = \sum_{L,m,L',m'} Y_{m'}^{L'}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) Y_{m}^{L}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \langle L'm'm_1m_2 |\ T\ | Lm\varepsilon \rangle$$

$$= \sum_{J,L,L',S',m'} e^{im'\theta}\ C_{m'}^{L'}\ C_{m}^{L}\ \langle L'm'S'\mu | JM \rangle \langle Lm_1 j_2 m_2 \langle S'\mu \rangle$$

$$\times \langle Lm\ \frac{1}{2}\ |\ JM \rangle\ T_{L'S'}^{J'L}$$

avec $C_m^L = (-)^m \left[\dfrac{2L+1}{4\pi}\ \dfrac{(L-m)!}{(L+m)!}\right]^{1/2} P_L^m(0)$

La conservation de la parité implique l'invariance de ces amplitudes sous une transformation produit d'une réflexion d'espace et d'une rotation de π autour de la normale (symétrie par rapport au plan de la réaction). Sur chaque vecteur d'état une telle symétrie $S_n = e^{-i\pi J_{\vec{n}}}$. P agit de façon simple :

$$S_n\ |j_i m_i\rangle = \eta_i\ e^{-i\pi m_i}\ |j_i m_i\rangle$$

où η_i représente la parité intrinséque de la particule i. Nous en déduisons

pour les amplitudes la relation suivante :

$$T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}(\theta) = \eta_G \, e^{+i\pi(m_1+m_2-\varepsilon)} \, T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}(\theta)$$

où η_G est le produit des parités intrinséques des particules mises en jeu. Nous retrouvons sous cette forme les implications de la conservation de la parité, à chaque couple m_1, m_2 il correspond une amplitude de transversité et une seule ($\eta_G = e^{-i\pi(m_1+m_2)} \; e^{+i\pi\varepsilon}$).

Si nous considérons maintenant la symétrie autour d'un plan contenant $\vec{n}$ et $\vec{p}_1$: $S_1 = e^{-i\pi J \vec{p}_1}$. P la normale est retournée, les transversités et l'angle θ restent invariants. Dans le repère de transversité que nous (réf. avons choisi lié au projectile (K^-) l'axe $n_1(p)$ est dirigé suivant $\vec{p}_1$, nous savons que $(e^{-i\pi J_X})_{mm'} = d^j_{mm'}(\pi) = (-)^{j-m}$. Par conséquent l'effet de la transformation $S_1 = e^{-i\pi J \vec{p}_1}$ P est de multiplier les amplitudes par une phase :

$$\eta \, e^{-i\pi(\frac{1}{2} - \varepsilon)} \; e^{-i\pi(j_1 - m_1)} \; e^{-i\pi(j_2 - m_2)} = e^{-i\pi(j_1 + j_2 - 1/2)}$$

jusqu'à présent avec les conventions usuelles θ varie entre 0 et π [$\sin\theta > 0$], une façon d'étendre le domaine de variation de π entre 0 et 2π est de fixer l'axe de quantification suivant la normale au plan de la réaction quelque soit l'orientation de $\vec{p}_3$.

Dans ce cas la transformation précédente S_1 a pour effet d'inverser les indices m_1, m_2, ε et de changer θ en $-\theta$. Ce qui nous permet d'écrire une relation entre deux amplitudes de transversité pour des indices et des valeurs de θ opposés :

$$T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}(-\theta) = e^{-i\pi(j_1+j_2-1/2)} \; T_{-\varepsilon}^{-m_1 -m_2}(\theta)$$

Ce qui revient à dire aussi que les deux amplitudes $T_{\varepsilon}^{m_1 m_2}$, $T_{-\varepsilon}^{-m_1 -m_2}$ sont prolongements analytiques l'une de l'autre en tant que fonctions de θ.

II - LA VARIABLE W ET LES QUANTITES OBSERVEES.

Le schéma précédent s'applique au cas d'une diffusion $0^- \; 1/2^+ \; 0^- \; 1/2^+$. Nous définirons alors les deux amplitudes de transversité suivantes :

$$f(\cos\theta) + ig(\cos\theta)\sin\theta \quad \text{et} \quad f(\cos\theta) - ig(\cos\theta)\sin\theta$$

où f et g sont respectivement les amplitudes usuelles de non renversement et de renversement de spin.

L'utilisation de la variable $W = e^{i\theta}$ proposée par Barrelet (réf. 13) permet d'écrire les deux amplitudes de transversité sous la forme :

$$F^{\varepsilon}(W) = f\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) + \varepsilon \, \frac{W - W^{-1}}{2} \, g\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad (1)$$

Ce qui revient à définir une seule fonction F(W) coïncidant avec $F^+(W)$ ou $F^-(W)$ suivant le signe de θ, $(0 < \theta < 2\pi)$ $F^+(W) = F^-(W^{-1})$.

Dans le cas d'une diffusion sur cible non polarisée l'expression de la matrice densité de spin de l'état final en fonction des quantités mesurées est donnée par :

$$\rho^f = \begin{pmatrix} 1 + P & 0 \\ 0 & 1 - P \end{pmatrix} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

chaque élément de cette matrice peut donc s'écrire simplement en fonction de l'amplitude F(W) :

$$(1 \pm P) \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{p_i^2} \left| F^{\pm}(W) \right|^2 \qquad (2)$$

ce qui est l'équivalent des formules classiques :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{p_i^2} \left(|f|^2 + |g|^2 \sin^2\theta \right)$$

$$\vec{P} \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2}{p_i^2} \, \vec{n} \; \mathrm{Im} \, f(\theta) \, g^*(\theta) \sin\theta$$

Nous venons de montrer comment, dans le système de transversité, les éléments de la matrice densité, en principe accessibles à l'expérience, s'expriment simplement en fonction de F(W). Nous examinerons maintenant en détail le domaine d'analyticité de F dans la variable $W = e^{i\theta}$.

III - DOMAINE D'ANALYTICITE.

Dans le plan complexe de la variable $Z = \cos\theta$ l'amplitude de transition F(Z) posséde des singularités dynamiques et cinématiques, les premières sont dues aux pôles échangés dans la voie t les secondes sont dues au caractère multiforme de $\sin\theta = (1 - Z^2)^{1/2}$. Ainsi le plan de la variable Z est recouvert par deux feuillets de Riemann.

La relation entre la variable Z et la variable $W = e^{i\theta}$ définit une transformation conforme $Z = \frac{W + W^{-1}}{2}$. L'effet de cette transformation sur le plan de la variable Z est indiqué sur la figure 6. Le segment $[-1, +1]$ qui définit la région physique de la variable $\cos\theta$ devient le cercle unité $|W| = 1$ (γ), les deux feuillets de la surface de Riemann sont transformés en deux demi-plans séparés l'un de l'autre par l'axe réel. Cette transformation élimine les singularités cinématiques de l'amplitude. En supposant que les singularités dynamiques ne sont pas au contact de la région physique nous sommes en mesure de définir une fonction analytique $\Sigma(W)$ qui coïncide sur la circonférence unité avec les quantités mesurées :

$$\Sigma(W) \begin{cases} \Sigma^+(W) = |F^+(W)|^2 = (1 + P)\,\frac{d\sigma}{d\Omega} & \text{sur } \gamma_+ \text{ (demi-cercle supérieur)} \\ \Sigma^-(W) = |F^-(W)|^2 = (1 - P)\,\frac{d\sigma}{d\Omega} & \text{sur } \gamma_- \text{ (demi-cercle inféireur)} \end{cases}$$

$\Sigma(W)$ réalise un prolongement analytique au voisinage du cercle unité :

$\Sigma(W) = F(W)\ \overline{F(\overline{W}^{-1})}$.

IV- APPROXIMANTS - ESTIMATEURS - CONVERGENCE.

Le choix que nous avons fait de décrire les amplitudes de diffusion dans le système de transversité et l'utilisation de la variable $W = e^{i\theta}$, nous à conduit à définir une fonction analytique $\Sigma(W)$ qui coïncide avec la section efficace polarisée sur la région physique et la prolonge, dans un voisinage, dans le plan complexe de la variable W.

Nous sommes dès lors en mesure d'extraire de l'information sur l'amplitude F(W). En particulier si F(W) a des zéros ils sont aussi zéros de $\Sigma(W)$ et, par conséquent, le problème qui se pose à nous maintenant est de représenter le mieux possible $\Sigma(W)$ à l'aide de ses zéros qui seront directement obtenus à partir des données expérimentales.

Ce problème mathématique de l'approximation d'une fonction analytique mériterait un exposé complet mais hors de notre propos nous renvoyons donc le lecteur intéressé à des ouvrages spécialisés (réf. 16). Nous nous contenterons de fournir l'essentiel des résultats utilisés ici.

Par analogie avec la théorie des développements orthogonaux, et puisque $\Sigma(W)$ admet un développement en série de Laurent convergeant dans un anneau au voisinage de la région physique ($|W| = 1$), nous utiliserons comme approximants des pseudo-polynômes en W, c'est-à-dire des polynômes en W et W^{-1}. Le meilleur approximant d'ordre n de $\Sigma(W)$ est alors choisi de la forme :

$$S_{2n}(W) = \sum_{-n}^{n} C_K W^K$$

Dans la pratique nous devrons réaliser une estimation statistique de $S_{2n}(W)$. Nous voyons alors comment l'approche de $\Sigma(W)$ peut se faire en estimant les 2n racines (ou zéros) d'un polynôme du type $W^{-n} \sum_{0}^{2n} C_K W^K$.

Cependant un des inconvénients d'une telle méthode de calcul du meilleur estimateur approché est la limitation du domaine de convergence. C'est la raison pour laquelle des travaux importants, visant à faire coïncider le domaine de convergence avec le domaine d'analyticité de la fonction à approcher, ont été effectués à l'aide d'approximants polynomiaux et de transformations conformes élaborées (réf. 15, Annexe). Nous devons pour finir, signaler que les racines du polynôme d'approximation peuvent être de deux sortes les unes dites "zéros stables" convergent pour $n \to \infty$ vers les vrais zéros de $\Sigma(W)$ intérieurs à l'anneau de convergence $C_{\rho,1/\rho}$, les autres appelées "zéros instables" qui ne peuvent pas converger vers les zéros de $\Sigma(W)$ et par conséquent sont situés à l'extérieur ou au voisinage immédiat de la couronne de convergence.

A titre indicatif si nous considérons l'échange du K^* comme dominant dans la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$, la singularité la plus proche sera située à $t = m^2_{K^*}$ et par suite dans le plan Z, puis W nous aurons :

$$Z_0 = \frac{m^2_{K^*} - m^2_{K^-} - m^2_{\pi^\circ} + 2 E_{K^-} E_{\pi^\circ}}{2 p_{K^-} \cdot p_{\pi^\circ}}$$

$$W_0 = Z_0 \pm \sqrt{Z_0^2 - 1}$$

W_0 définissant l'anneau de convergence $C_{\rho,1/\rho}$. Entre 1500 et 2500 MeV les rayons internes (ρ) et externes ($1/\rho$) des anneaux de convergence varient entre $\rho = 0.1$, $1/\rho = 10$ et $\rho = 0.4$, $1/\rho = 2.4$.

V - DEVELOPPEMENT EN ONDES PARTIELLES : cas $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$.

Habituellement pour une diffusion $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$ nous utilisons dans le plan de la variable $\cos\theta$ les développements en ondes partielles des amplitudes f et g :

$$f(\cos\theta) = \sum_{J,L} (J + 1/2)\, T_{J,L}\, P_L(\cos\theta)$$
$$g(\cos\theta) = \sum_{J,L} (-)^{J-L-1/2}\, T_{J,L}\, P'_L(\cos\theta) \qquad (3)$$

Ces développements convergent dans un domaine limité par une ellipse. Dans le plan de la variable W le développement en ondes partielles de l'amplitude F(W) coïncide avec la suite des meilleurs approximants pseudo-polynomiaux sur le cercle unité pour la norme $n(W) = \frac{1}{2} |1 - W^{-2}|$.

Il existe bien sûr un grand choix de normes possibles sur le cercle, mais celle-ci correspond à une norme dans le plan $\cos\theta$: $n(\cos\theta) = 1$.

De cette manière nous accordons une égale importance à tout le domaine angulaire ce qui est justifié par l'allure de nos données expérimentales ne présentant pas de dissymétrie importante à l'avant ou à l'arrière. Ceci ne serait évidemment pas le cas pour des réactions présentant un pic avant, il faudrait alors employer des normes d'intégration propres à défavoriser la région du pic.

Nous écrirons :

$$F(W) = \sum_{J,L} T_{J,L}\, R_{J,L}(W) \qquad (4)$$

où les $R_{J,L}(W)$ sont les pseudo-polynômes orthogonaux définis par Barrelet (cf. B1) reliés au polynômes de Legendre de la manière suivante :

$$R_{J,L}(W) = (J + 1/2)\, P_L\left(\frac{W+W^{-1}}{2}\right) + (-)^{J-L-1/2}\, \frac{W-W^{-1}}{2}\, P'_L\left(\frac{W+W^{-1}}{2}\right) \qquad (5)$$

Un développement tel que (4) converge à la manière d'une série de Laurent c'est-à-dire dans le plus grand anneau $\rho < |W| < 1/\rho$ ne contenant pas de singularités de F(W).

En utilisant la forme des $R_{J,L}(W)$ nous pouvons écrire F(W) :

$$F(W) = \Sigma a_L P_L\left(\frac{W+W^{-1}}{2}\right) + \frac{W - W^{-1}}{2} \Sigma b_L P'_L \left(\frac{W+W^{-1}}{2}\right) \qquad (6)$$

Et à l'aide des propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre on peut en déduire les ondes partielles :

$$\begin{aligned} T^{L+1/2,L} &= (a_L + L\, b_L)/(2\, L + 1) \\ T^{L-1/2,L} &= (a_L - (L+1)\, b_L)/(2\, L + 1) \end{aligned} \qquad (7)$$

Nous nous proposons maintenant de faire intervenir plus directement les zéros de l'amplitude F(W).

Réexprimons la série de puissance $S_{2n}(W) = \sum_{-n}^{n} C_K W^K$ sous la forme d'un produit de zéros

$$\begin{aligned} S_{2n}(W) &= a \prod_{K=1}^{n} (W - W_K)\,(W^{-1} - \bar{W}_K) \\ &= a' W^{-n} \prod_{1}^{n} (W - W_K)\,(W - \tilde{W}_K) \qquad \tilde{W}_K = \bar{W}_K^{-1} \end{aligned}$$

Il est tout naturel d'écrire alors un estimateur de l'amplitude sous la forme :

$$F_n(W) \propto \prod_{K=1}^{n} (W - W_K)$$

et, en normalisant à l'aide de l'amplitude du processus étudié pour $\theta = 0°$, on obtient finalement l'amplitude à partir de ces Zéros sous la forme :

$$F_n(W) = F(1)\, W^{-\upsilon} \prod_{K=1}^{n} \frac{W - W_K}{1 - W_K} \cdot e^{i\phi} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} n &= J_{MAX} + L_{MAX} - \frac{1}{2} \\ \upsilon &= L_{MAX} \end{aligned} \qquad (8)$$

(*) - Dans la suite de notre exposé nous utiliserons la notation F(W) débarassé de l'indice n pour désigner l'amplitude ou sa meilleure estimation approchée.
Nous poserons $J = J_{MAX}$, $L = L_{MAX}$ et nous utiliserons j, ℓ pour les indices courants.

VI- LES AMBIGUITES.

L'expression simple de l'amplitude F(W) va nous permettre d'éclairer d'une lumière nouvelle les ambiguïtés classiques de l'analyse en ondes partielles.

Si nous tronquons le développement de $\Sigma(W)$ à l'ordre n et choisissons par conséquent de représenter les données à l'aide de 2n zéros, $\Sigma(W)$ s'écrit :

$$\Sigma(W) \propto \prod_{K=1}^{n} (W - W_K)\ (W - \tilde{W}_K) \qquad \text{avec } \tilde{W}_K = \bar{W}_K^{-1}$$

On remarque alors qu'il existe 2^n façons de choisir les n zéros de l'amplitude F(W), en effet, pour chaque zéro on peut choisir celui qui est intérieur au cercle W_i ou son image $\tilde{W}_i = \bar{W}_i^{-1}$ chacun de ces deux choix redonnant la même section efficace polarisée $\Sigma(W) = F(W)\ \overline{F(\tilde{W})}$.

Il existe un certain nombre de transformations qui agissent sur les amplitudes d'ondes partielles et laissent invariante la distribution angulaire de production mais inverse la polarisation. Il s'en suit que le produit de deux quelconque de ces transformations entraîne une ambiguïté totale dont on ne peut se débarasser à moins de mesurer les paramètres $\vec{R}$. $\vec{A}$ que l'on obtiendrait sur cible polarisée.

$$R \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\ n\ \mathrm{Re}\ f(\theta)\ g^*(\theta)$$

$$A \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 - |g(\theta)|^2$$

En outre à toutes ces ambiguïtés, en principe possible à résoudre, nous devons ajouter une ambiguité continue due à la phase $\phi(S)$ (réf. 17).

a - Transformations qui changent P en -P :

1.- Conjugaison complexe

$T_\ell^{\pm}$ est transformée en $T_\ell^{*\pm}$ ce qui implique F(W) transformée en $F(\bar{W})$.

2.- Transformation de Minami.

Cette transformation nous fait passer d'une onde de moment angulaire donnée à l'onde de moment angulaire augmenté d'une unité $[F_7 \to G_7]$.

D'après les propriétés des $R_{JL}(W)$ (cf. B1). Nous aurons :

$$\mathcal{M}(F(W)) = W^{-1} F(W^{-1})$$

3.- Transformation de Yang.

Une telle transformation s'écrit :

$$YT_\ell^+ = \pm (2\ell + 1)^{-1} \left[T_\ell^+ + 2\ell\, T_\ell^-\right]$$

$$YT_\ell^- = \pm (2\ell + 1)^{-1} \left[2(\ell + 1)\, T_\ell^+ - T_\ell^-\right]$$

Elle laisse f(θ) inchangée mais renverse g(θ) et, par conséquent :

$$Y\, F(W) = F(W^{-1})$$

.- Les transformations produit qui laissent $(1 + P)\frac{d\sigma}{d\Omega}$ invariant :

Nous pouvons les écrire sous la forme suivante :

$$\bar{Y}\,(F(W)) = \overline{F(\bar{W}^{-1})}$$

$$\mathcal{M}\,(F(W)) = W^{-1}\,\overline{F(\bar{W}^{-1})}$$

$$Y\,\mathcal{M}\,(F(W)) = W\,F(W)$$

$$\mathcal{M}\,Y\,(F(W)) = W^{-1}\,F(W)$$

En fait nous pouvons multiplier F(W) par n'importe quelle fonction u(W) de module 1 sur le cercle. La plus simple étant $u(W) = W^{\pm 1}$.

Alors les deux premières ambiguités se traduisent en pratique par l'inversion de tous les zéros suivie ou non par une multiplication du type W^n. Les deux autres correspondent à une multiplication par W^n sans inversion des zéros.

-:-

C H A P I T R E I I

-:-

PRESENTATION DES DONNEES

-:-

A L'aide d'une transformation conforme, d'un prolongement analytique et de la théorie de l'approximation, nous venons de voir comment il était possible de décrire un processus d'interaction à deux corps en fonction des zéros des amplitudes de transversité.

Nous voulons examiner maintenant de quelle manière les données brutes expérimentales vont nous permettre d'accéder aux ondes partielles par l'intermédiaire des zéros et montrer qu'il existe une méthode objective de présentation des données.

I - DES ZEROS VERS L'AMPLITUDE F(W).

Expérimentalement nous mesurons des distributions angulaires et la fonction Σ ainsi mesurée peut s'écrire :

$$\Sigma(W) = \sum_{\ell} \left[A_{\ell} \, P_{\ell}\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) - i \, B_{\ell} \, \frac{W - W^{-1}}{2} \, P'_{\ell}\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) \right] \qquad (1)$$

Nous avons vu dans la première partie comment d'ordinaire on estime les coefficients A_ℓ, B_ℓ ; il est dès lors facile d'estimer les zéros du membre de droite (W_i, $\tilde{W}_i$) et par conséquent en ne gardant qu'un zéro par paire il est possible de reconstruire F(W). Cependant,concrétement,nous savons que des développements tels que (1) ont un domaine de convergence limité, ce qui implique qu'une fraction seulement des zéros W_i convergent vers les zéros vrais des $\Sigma(W)$ nous les appelerons zéros proches (stables) par opposition aux autres baptisés zéros lointains (instables).

Si nous savons estimer les zéros, vrais ou non, de $\Sigma(W)$, nous savons reconstruire l'amplitude F(W) ; peut-on donner une idée de la "proximité" d'un zéro ?

II - LES DONNEES ET LES ZEROS.

Lorsque l'amplitude F(W) posséde un pôle près de la région physique nous savons que cela se traduit par la présence d'une bosse dans la section efficace polarisée Σ, de la même manière à un zéro de F il correspond un creux dans la section efficace, creux d'autant plus profond que le zéro est proche de la région physique. Il semble donc assez naturel de représenter les données $\Sigma^{+}_{-} = (1 \pm P) \frac{d\sigma}{d\Omega}$ sur un cylindre dont la base serait le cercle unité ce qui permet de relier de façon simple les creux aux zéros.

Expérimentalement nous avons traduit ce lien en utilisant les zéros W_i comme paramètres pour ajuster les données.

Dans le cas qui nous intéresse ici, c'est-à-dire la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ suivie de la désintégration $\Lambda^\circ \to \rho \pi^-$ la distribution angulaire peut s'écrire :

$$I(\theta, \beta) = (1 + P)\frac{d\sigma}{d\Omega} (1 + \alpha \cos\beta) + (1 - P) \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \alpha \cos\beta) \qquad (2)$$

où α est le paramètre d'asymétrie, β l'angle de désintégration du Λ° dans son système, avec $\cos\beta = \frac{\vec{p}_p \cdot \vec{n}}{p_p p_{\bar{p}}}$ $\quad \vec{n} = \frac{\vec{K} \times \vec{\Lambda}}{|\vec{K} \times \vec{\Lambda}|}$. La distribution $I(\theta, \beta)$ ainsi définie peut s'exprimer en fonction des zéros W_i :

$$I(\theta, \beta) = |F^+(W)|^2 \ (1 + \alpha \cos\beta) + |F^-(W)|^2 \ (1 - \alpha \cos\beta) \qquad (3)$$

Connaissant l'expression de F(W) en fonction des zéros W_i (chap. I, f. (8)), nous avons réalisé un ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance dont nous avons déduit les zéros puis, $\Sigma(W)$.

Cette méthode, compte tenu de la forme que nous avons prise pour la densité de probabilité $I(\theta, \beta)$, posséde l'avantage important de préserver la positivité.

Nous montrons les résultats de cet ajustement pour les 20 énergies correspondant aux expériences C.R.S., C.S. (fig. 7).

La représentation des données que nous proposons est donc la suivante :

- Ajuster les distributions angulaires expérimentales au moyen d'une méthode de maximum de vraisemblance utilisant comme fonction densité la distribution $I(\theta, \beta)$ exprimée à l'aide des zéros.

- Contrôler la qualité de l'ajustement en fonction du nombre de paramètres utilisés et de la statistique requise, ce qui doit permettre de donner une idée du nombre maximum de zéros déterminables avec précision.

- Examiner la stabilité des zéros en accroissant leur nombre, ce qui revient à augmenter l'ordre du meilleur estimateur approché.

- Finalement, visualiser les résultats obtenus (fig. 7). Pour cela on dessine en coordonnées polaires (ρ, θ) les projections des distributions expérimentales $\left[(1 \pm P) \frac{d\sigma}{d\Omega}\right]$, la courbe qui résulte de l'ajustement et la position des zéros à l'intérieur du cercle unité.

Dans une troisième partie nous discuterons en détail nos résultats obtenus de cette manière pour les énergies hautes de notre compilation.

Cette troisième partie sera, par ailleurs, consacrée à l'analyse proprement dite de la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ au moyen du formalisme que nous venons de décrire.

III - ESTIMATION DE L'ERREUR SUR LA POSITION DES ZEROS.

Nous venons de déterminer la position des zéros dans le plan complexe de la variable W à l'aide de la densité de probabilité :

$$f(W_i, K) = (1 + \alpha \cos\beta_K) \left|F^+(W)\right|^2 + (1 + \alpha \cos\beta_K) \left|F^-(W)\right|^2$$

En effet, nous pouvons écrire une fonction de vraisemblance :

$$L_i = \prod_{K=1}^{N} f(W_i, K)$$

Et le logarithme associé $\mathcal{L}(W_i) = \sum_K \text{Log } f(W_i, K)$.

De cette expression nous pouvons en principe déduire une estimation de l'erreur sur la position des zéros $W_i = \rho_i \, e^{i\theta_i}$.

Mais la méthode du maximum de vraisemblance demande que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^3 \text{Log } f}{\partial \alpha^3}$ soient majorées indépendemment du paramètre α, or dans notre cas l'expression de f nous conduit à trouver que $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ devient infini si $\rho = 1$. La méthode n'est donc pas appropriée à un calcul d'erreur si les zéros se trouvent sur le cercle.

Une autre manière de procéder, bien préférable, et que nous avons utilisée consiste en la détermination de l'erreur à l'aide d'une méthode purement statistique dont nous allons exposer les principes.

- Dans le cas d'une diffusion $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$ nous avons vu comment s'exprimait la section efficace polarisée $(1 + P) \frac{d\sigma}{d\Omega}$ à l'aide des coefficients usuel A_ℓ, B_ℓ des développements en polynome de Legendre de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ et $P \frac{d\sigma}{d\Omega}$. L'évaluation de n paires de zéros de $\Sigma(W)$ passe alors par le calcul des racines du polynôme d'approximation d'ordre n :

$$S_{2n}(W) = a_0 + a, W + \ldots + a_n W^n + \ldots + a_1^*, W^{2n-1} + a_0^* W^{2n}$$

où les coefficients a_i sont des fonctions simples des coefficients A_ℓ, B_ℓ donnés par les expériences (Appendice B-3).

- Les coefficients A_ℓ, B_ℓ estimés en général par des méthodes de moments sont fournis avec leurs erreurs, nous avons alors effectué des tirages au sort de ces coefficients considérés comme des variables gaussiennes indépendantes ayant pour valeur centrale les valeurs en notre possession et pour écart quadratique les erreurs fournies. A chaque couple A_ℓ, B_ℓ ainsi obtenu il correspond un ensemble de coefficients a_i et par suite n paires de zéros W_i, nous pouvons ainsi estimé n zéros moyens entachés d'une certaine erreur.

Dans la pratique nous avons réalisé 300 tirages aléatoires nombre à partir duquel la distribution des A_ℓ, B_ℓ est vraiment gaussienne et nous avons estimé l'erreur par la dispersion sur le module ρ et l'argument θ de chaque zéro, ce calcul réalisé à chaque énergie nous donne une idée de la variation de l'erreur en fonction de la proximité d'un zéro confirmant, comme il était prévisible, qu'un zéro est d'autant mieux localisé qu'il se trouve près de la région physique (fig. 7 et 8).

Ce calcul, comme tout calcul de ce type, est couteux en temps machine, de façon à ne pas le reproduire trop souvent nous avons donc simultanément évalué l'incertitude sur les amplitudes d'ondes partielles à chaque énergie et pour chaque inversion de zéros possible. Après avoir constaté que les erreurs commises sur les amplitudes ne dépendaient pas des ambiguïtés engendrées par le choix d'un zéro ou de son conjugué, nous avons convenu de prendre une erreur moyenne sur le module de chaque amplitude d'onde partielle. Ces erreurs seront utilisées par la suite lorsque nous effectuerons l'analyse proprement dite de la réaction $K^- \; p \to \pi^\circ \; \Lambda$.

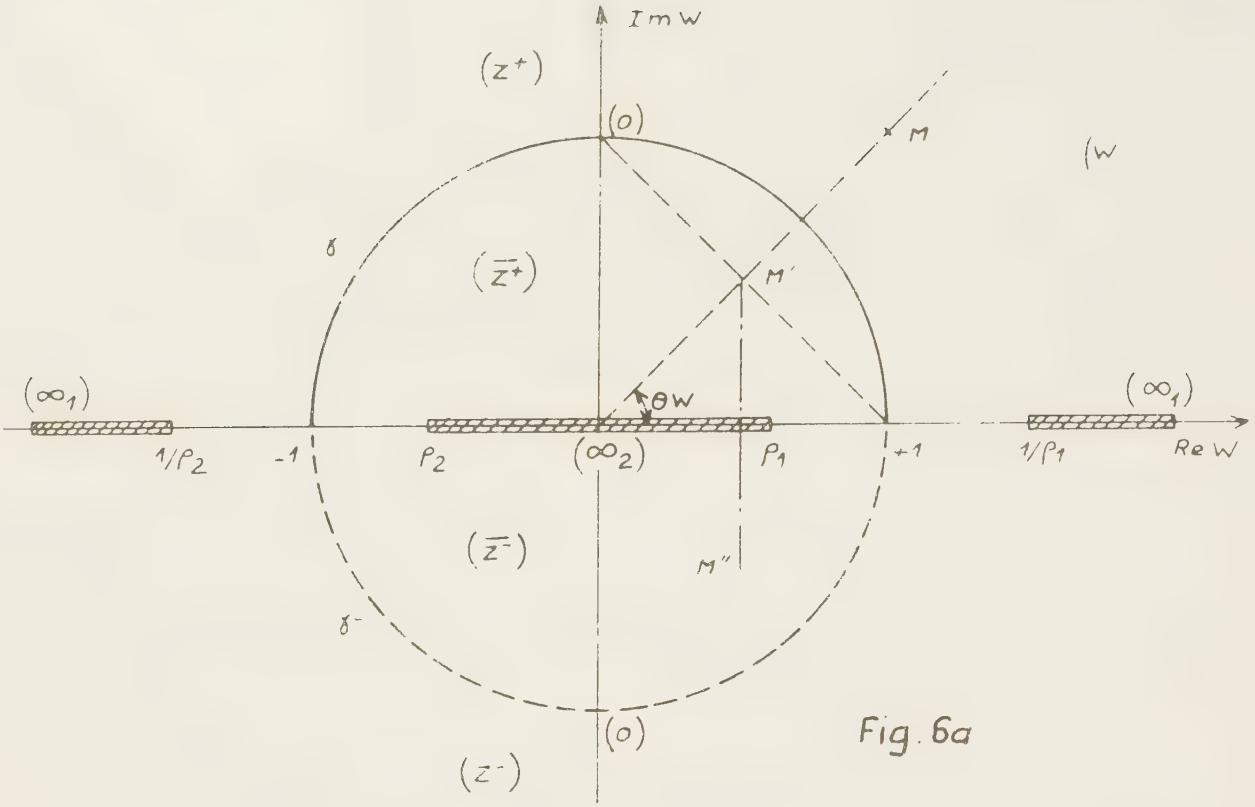
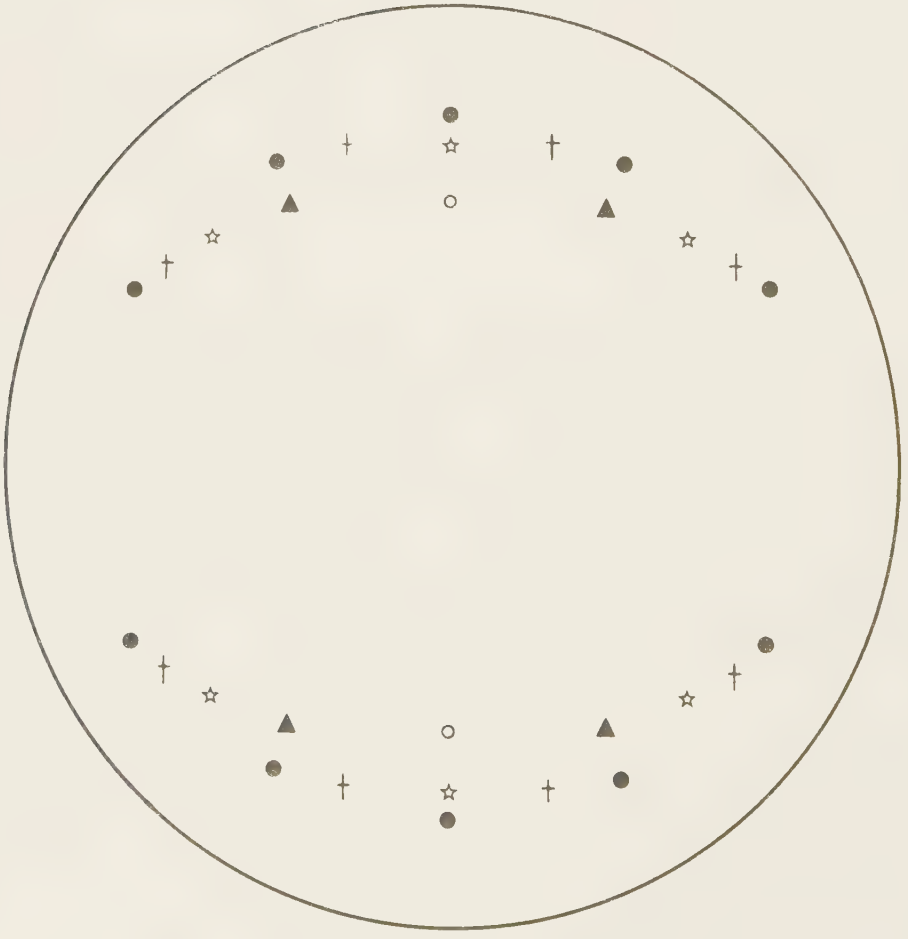


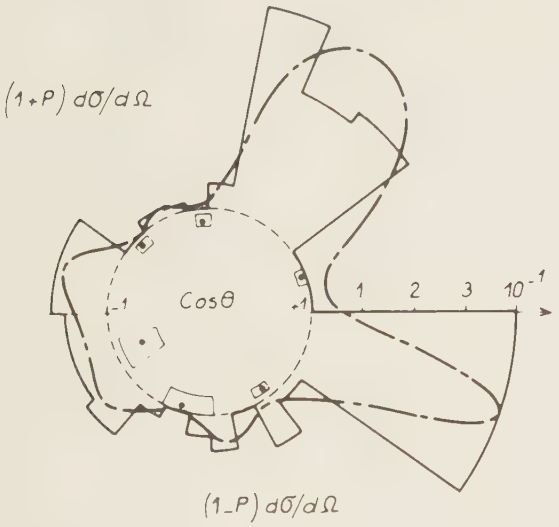
Fig. 6a



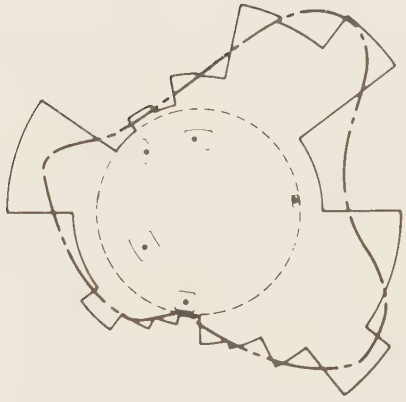
Position des zéros des $R_{JE}(W)$ ● 11/2 + 9/2 ✡ 7/2 ▲ 5/2 ○ 3/2

Fig. 6b

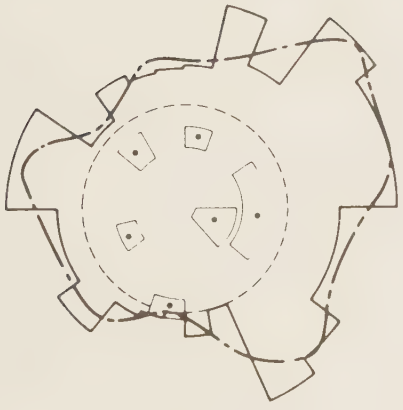
1.263 GeV/c



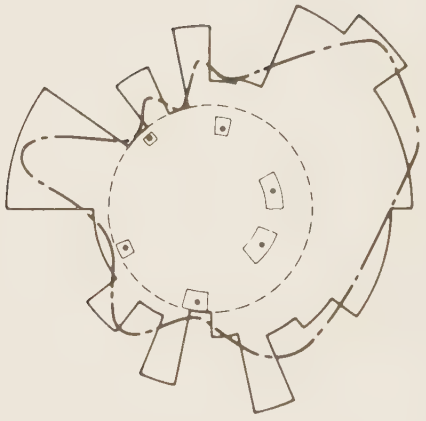
1.316 GeV/c



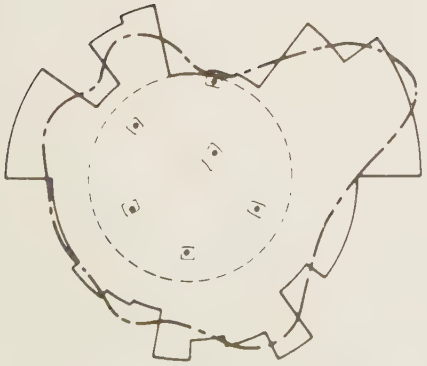
1.368



1.415



1.462



1.514

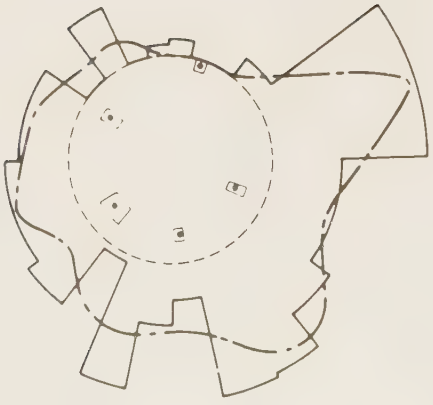
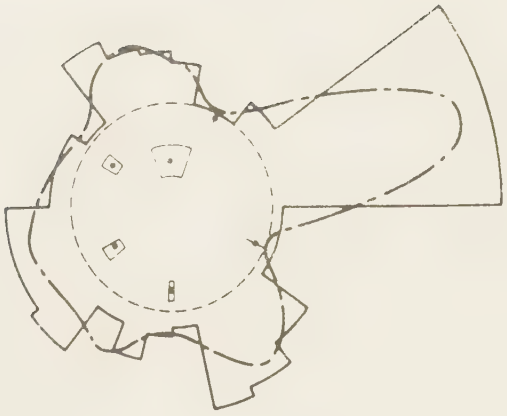
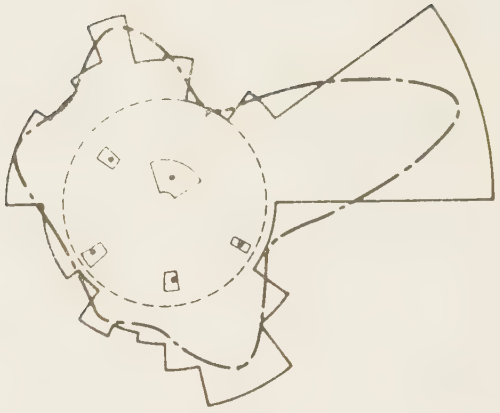


Fig.7a

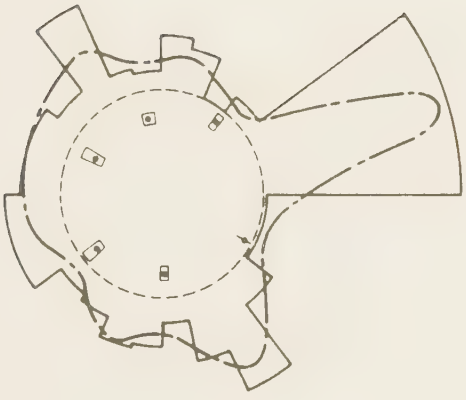
1.546



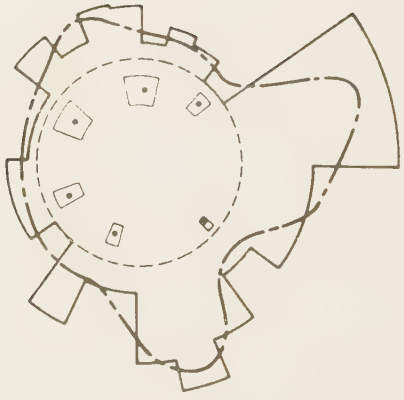
1.606



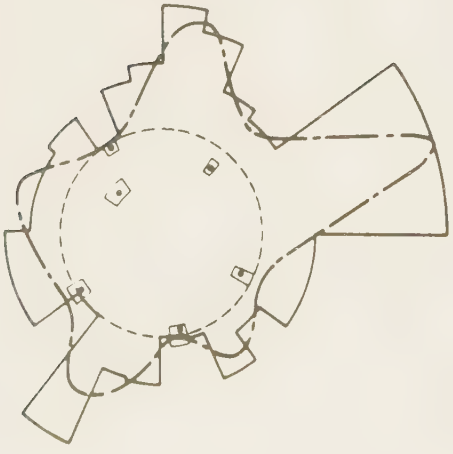
1.653



1.705



1.741



1.800

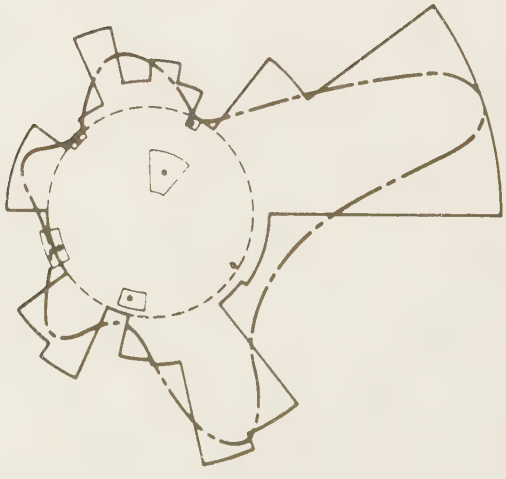
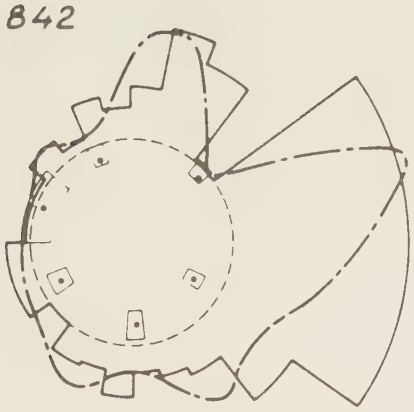
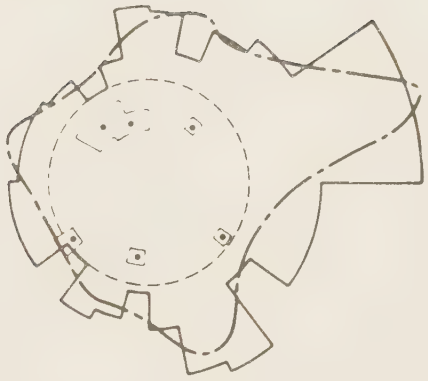


Fig. 7b

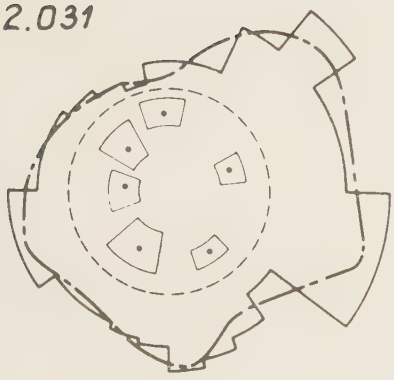
1.842



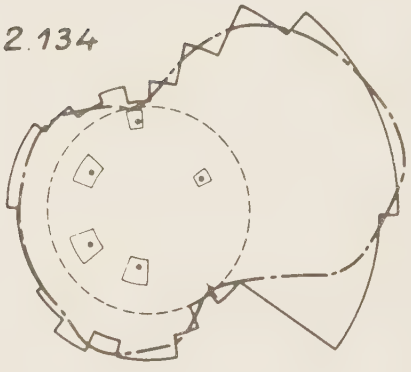
1.934



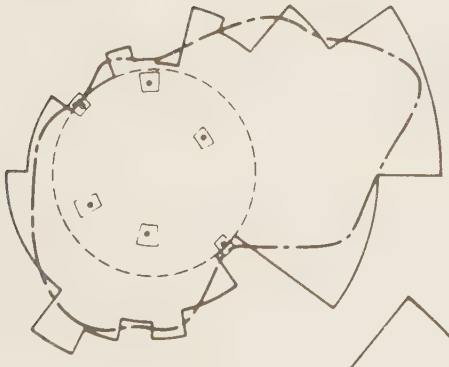
2.031



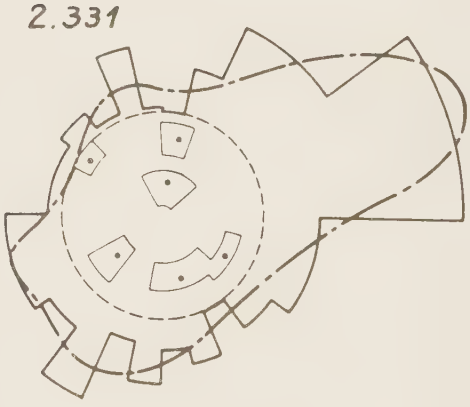
2.134



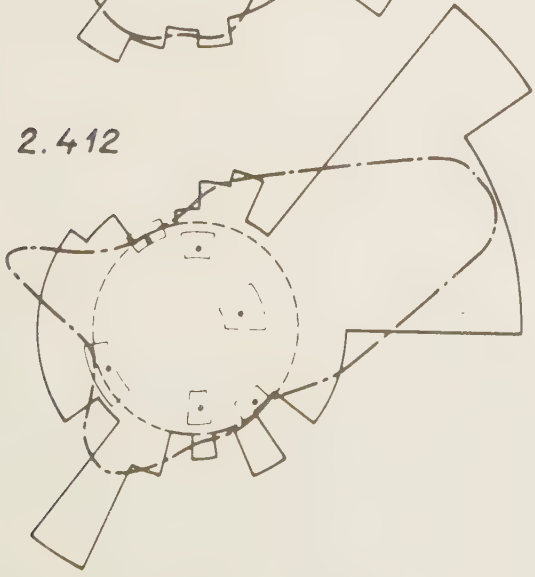
2.235



2.331



2.412



2.516

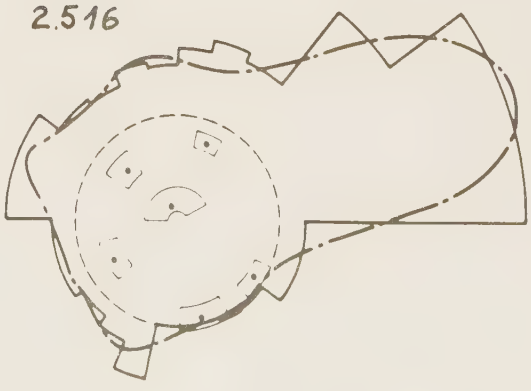


Fig. 7c

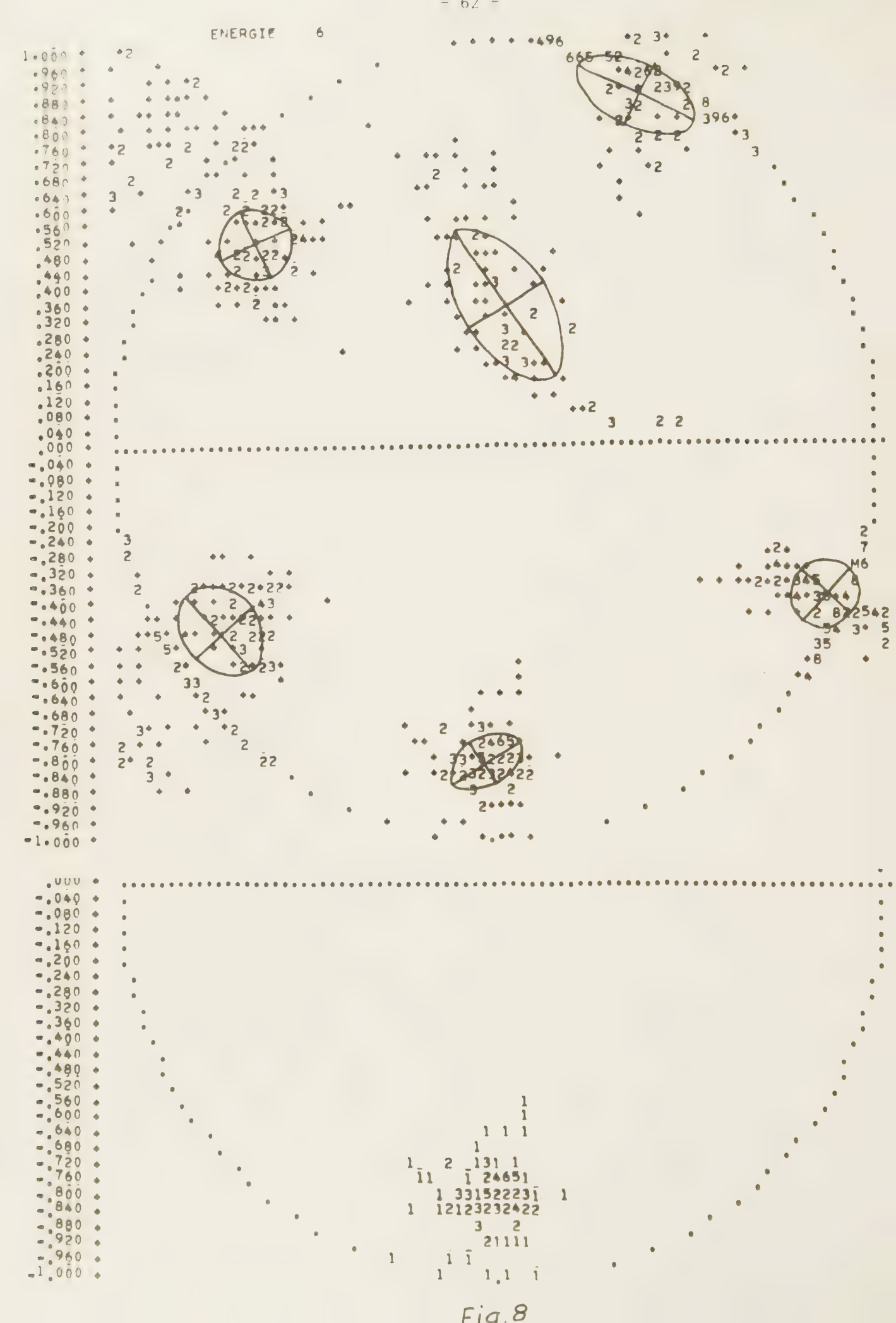


Fig.8

A P P E N D I C E B-1

-:-

LES PSEUDO-POLYNOMES $R_{j,\ell}(W)$.

-:-

Les pseudo-polynômes sont définis par un processus d'orthogonalisation de l'ensemble 1, W, W^{-1}, W^2, ..., W^n, W^{-n}, avec le produit scalaire :

$$< f \mid g >_Z = \int_\Gamma f \cdot g \; n(Z) \; |dZ|$$

Pour la norme n(Z) = 1 si nous exprimons le produit scalaire en fonction de W on obtient $dZ = \frac{1}{2} \; |1 - W^{-2}| \; dW$ et, par conséquent :

$$< f \mid g >_W = \int_\gamma f(W(Z)) \; \overline{g}(W(Z)) \; n(W) |dW|$$

avec $n(W) = \frac{1}{2} \; |1 - W^{-2}|$.

Par définition les $R_{j\ell}(W)$ sont des pseudo-polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire. Ils sont simplement reliés aux polynômes de Legendre de la manière suivante :

$$R_{j\ell}(W) = (j + \frac{1}{2}) \; P_\ell(\frac{W+W^{-1}}{2}) + (-)^{j-\ell-1/2} \; \frac{W-W^{-1}}{2} \; P'_\ell(\frac{W+W^{-1}}{2})$$

avec $$P_\ell(\frac{W+W^{-1}}{2}) = \sum_{K=0}^{\ell} C_K (W^{-K} + W^K) \quad \text{où} \quad C_K = \frac{1}{2^K} \cdot \frac{(2K!)}{2^K \; (K!)^2}$$

Nous pouvons les réecrire sous une forme plus maniable :

(1) $J = L + \frac{1}{2}$ $\qquad R_{j,\ell}(W) = C_L\, W^{-L} + \ldots + (2L+1)\, C_L\, W^{L}$

(2) $J = L - \frac{1}{2}$ $\qquad R_{j,\ell}(W) = 2L\, C_L\, W^{-L} + \ldots + W^{L-2}$

Propriétés des $R_{j,\ell}(W)$:

Orthogonalité : $\quad \langle R_{j',\ell'}(W) | R_{j,\ell}(W) \rangle = 4\,(j+\frac{1}{2})\,\delta_{jj'}\,\delta_{\ell\ell'}$

Coefficients réels : $\quad \overline{R}_{j\ell}(\overline{W}) = R_{j\ell}(W)$

Transformation de Minami : $\quad R_{j,j\mp 1/2}(W) = W^{-1}\, R_{j,j\pm 1/2}(W^{-1})$

Pour L = 0, 1, ..., 5 nous présentons la forme et les coefficients numériques des $R_{j,\ell}(W)$ (Tableau IV).

Pour $J \geqslant 3/2$ nous donnons les valeurs et la position des zéros des $R_{j\ell}(W)$ et des $R_{j\ell}(Z)$ (Tableau V, fig. 6).

Sous la forme développée en série de puissances W^L nous voyons clairement que le nombre de zéros des $R_{j\ell}(W)$ est donné par la relation $n_Z = J + L - 1/2$, J et L étant respectivement les moments angulaires qui déterminent l'ordre maximum des $R_{j,\ell}(W)$.

Exemple :

Si nous arrêtons notre développement à l'ordre L = 3, nous obtenons $n_Z = 6$, en d'autres termes pour atteindre l'onde partielle F_7 nous avons besoin de déterminer 6 zéros.

Si nous arrêtons le développement à J = 5/2, alors $n_Z = 5$, c'est-à-dire que 5 zéros suffisent pour reconstruire l'onde F_5.

NZ	L	J	ε	P	Onde	$R_{j\ell}(W)$									
0	0	1/2	+	+	S_1					1					
1	1	1/2	−	+	P_1				W^{-1}						
2	1	3/2	+	+	P_3				$\frac{1}{2}W^{-1}$		$\frac{3}{2}W$				
3	2	3/2	−	−	D_3			$\frac{3}{2}W^{-2}$		$\frac{1}{2}$					
4	2	5/2	+	−	D_5			$\frac{3}{8}W^{-2}$		$\frac{6}{8}$		$\frac{15}{8}W^2$			
5	3	5/2	−	+	F_5		$-\frac{15}{8}W^{-3}$		$\frac{6}{8}W^{-1}$		$\frac{3}{8}W$				
6	3	7/2	+	+	F_7		$\frac{5}{16}W^{-3}$		$\frac{9}{16}W^{-1}$		$\frac{15}{16}W$		$\frac{35}{16}W^3$		
7	4	7/2	−	−	G_7	$\frac{35}{16}W^{-4}$		$\frac{15}{16}W^{-2}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{5}{16}W^2$			
8	4	9/2	+	−	G_9	$\frac{35}{128}W^{-4}$		$\frac{60}{128}W^{-2}$		$\frac{90}{128}$		$\frac{140}{128}W^2$		$\frac{315}{128}W^4$	
9	5	9/2	−	+	H_9	$\frac{315}{128}W^{-5}$		$\frac{140}{128}W^{-3}$		$\frac{90}{128}W^{-1}$		$\frac{60}{128}W$		$\frac{35}{128}W^3$	

Tableau IV

$J^P \varepsilon>0$ / Zeros : $R_{J\varepsilon}$	$11/2^+$ H11	$9/2^-$ G9	$7/2^-$ F7	$5/2^-$ D5	$3/2^+$ P3
W_1	.711 - .388	.642 - .440	.534 - .503	+ .352 .569	0. .577
2	.394 - .667	.235 - .704	.0 - .703	- .352 .569	+ c.c.
3	.0 - .765	- .642 - .440	- .534 - .503	+ c.c.	
4	- .711 - .388	- .235 - .704	+ c.c.		
5	- .394 - .667 + complexes conjugués	+ c.c.			
Z_1^+	.897 .101	.851 .143	.763 .216	.567 .352	0 .577
2	.525 .222	.331 .287	.0 - .360	- .569 .352	+ c.c.
3	.0 .270	- .851 .143	- .763 .216	+ c.c.	
4	- .897 .101	- .331 .287	+ c.c.		
5	- .525 .222	+ c.c.			
$J^P \varepsilon<0$ / Zéros	$11/2^-$ I11	$9/2^+$ H9	$7/2^-$ G7	$5/2^+$ F5	$3/2^-$ D3
W_1	1.083 - .591	1.060 - .727	.993 - .934	.786 -1.272	0 -1.732
2	.657 -1.111	.427 -1.278	0. -1.423	- .786 -1.272	+ c.c.
3	0. -1.306	-1.060 - .727	- .993 - .934	+ c.c.	
4	-2.083 - .591	- .427 -1.278	+ c.c.		
5	- .657 -1.111	+ c.c.			
Z^-	$(\overline{Z^+})$				

Tableau V

A P P E N D I C E B-2

-:-

CONTINUITE DE L' AMPLITUDE F(W)

-:-

1 - Lien entre les ondes partielles et les zéros.

Le développement en ondes partielles de l'amplitude F(W) s'écrit

$$(1) \quad F(W) = \sum_{0}^{L} T^{j,\ell} R_{j,\ell}(W)$$

Nous allons donner un certain nombre de détails sur ce développement de façon à mieux comprendre le mécanisme d'introduction d'ondes supplémentaires.

D'après (1) F(W) est en fait un pseudo-polynôme :

$$F(W) \rightarrow (W^{-L} \ldots\ldots W^{J-1/2})$$

F(W) possède n = L + J - 1/2 zéros.

a) $J = L + 1/2$, nombre pair de zéros : $n = 2\,L$.

D'après la forme des $R_{j,\ell}(W)$ (cf. App. B-1), le coefficient du terme en W^L dans le développement (1), est :

$$(2\,L + 1)\; C_L\; T^{J,L}$$

D'autre part nous savons écrire aussi :

$$(2)\quad F(W) = W^{-L}\; F(1) \prod_1^n \frac{W - W_i}{1 - W_i} \qquad n = J + L - 1/2$$

si n est pair le coefficient de $W^{n-L} = W^L$ dans (2) est :

$$F(1) \prod_1^n \frac{1}{1 - W_i}$$

et par identification nous exprimerons l'onde $T^{J,L}$:

$$(3)\quad T^{J,L} \sim \frac{1}{2\,L + 1} \times \frac{1}{C_L} \times F(1) \times \prod_1^n \frac{1}{1 - W_i}$$

b) $J = L - 1/2$, nombre impair de zéros : $n = 2\,L - 1$.

Le coefficient du terme en W^{L-1} dans le développement de F(W) suivant les $R_{j,\ell}(W)$ s'écrit :

$$(2\,L - 1)\; C_{L-1}\; T^{J,L-1}$$

D'autre part, d'après l'expression (2), le coefficient du terme de plus haut degré $W^{n-L} = W^{L-1}$, s'écrit :

$$F(1) \prod_1^n \frac{- W_i}{1 - W_i}$$

En procédant par identification, termes à termes comme précédemment, nous pouvons écrire :

$$(4) \quad T^{J,L-1} \sim \frac{1}{2L-1} \times \frac{1}{C_{L-1}} F(1) \prod_{1}^{n} \frac{-W_i}{1-W_i}$$

L'examen des deux expressions (3) et (4) nous conduit tout naturellement à fournir une règle quant à l'introduction d'un zéro.

Sur la formule (3) nous voyons très clairement, W_i apparaissant au dénominateur, que si nous voulons préserver la continuité des amplitudes d'ondes partielles, le zéro supplémentaire doit venir de l'infini.

A l'inverse la formule (4), où W_i est présent au numérateur, nous apprend qu'un zéro supplémentaire doit venir de l'origine.

2 - Prolongement de l'amplitude.

Dans ce paragraphe nous voudrions montrer qu'il existe une procédure simple permettant de prolonger continûment l'amplitude totale F(W). Pour le meilleur estimateur d'ordre n de l'amplitude nous adopterons la notation condensée suivante :

$$F^{(n)}_{J,L}(W_1,\ldots,W_i,\ldots,W_n) = F(1)\, W^{-L} \prod_{i=1}^{n} \frac{W-W_i}{1-W_i} \qquad (1)$$

avec $n = J + L - 1/2$, $\tilde{W}_i = \bar{W}_i^{-1}$ (point mirroir)

L'expression (1) est un pseudo-polynôme qui possède un nombre de zéros pair ou impair.

a) n impair $F^{(n)}_{J,L}$ est de la forme $W^{-L} \ldots W^{L-1}$ ou $W^{-J-1/2} \ldots W^{J-1/2}$

b) n pair $F^{(n)}_{J,L}$ " $W^{-L} \ldots W^{L}$

- Dans le premier cas on peut écrire :

$$F_{J,L} \sim W^{-L} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{W - W_i}{1 - W_i} \times \frac{W - W_K}{1 - W_K}$$

$$F_{J+1,L} \sim W^{-L} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{W - W_i}{1 - W_i} \times \frac{W - W_K}{1 - W_K} \times \frac{W - W_j}{1 - W_j}$$

si $W_K \to 0$, alors

$F^{(n+1)}_{J+1,L}$ $(W_1, \ldots, \overset{\sim}{W_K}, \ldots, 0)$ prolonge continûment $F^{(n)}_{J,L}$ $(W, \ldots W_K, \ldots$

- Dans le deuxième cas de la même manière on a :

$$F^{(n)}_{J,L} \sim W^{-L} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{W - W_i}{1 - W_i} \times \frac{W - W_K}{1 - W_K}$$

si $W_K \to 0$ on a $F^{(n)}_{J,L} \sim W^{-L-1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{W - W_i}{1 - W_i} \times W \times \frac{W - W_K}{1 - W_K}$

autrement dit :

$F^{(n+1)}_{J,L+1}$ $(W_1, \ldots, W_K, \ldots, 0)$ prolonge continûment $F^{(n)}_{J,L}(W, \ldots W_K \ldots W$

Le même type d'opération nous permet d'écrire :

$F^{(n+1)}_{J,L+1}$ $(W_1, \ldots, W_K, \ldots, W_n, 0)$ prolonge $F^{(n)}_{J,L}(W_1 \ldots W_n)$ quand $W_K \to 0$

$F^{(n+2)}_{J+1,L+1}(W_1, \ldots, W_K, \ldots, W_n, 0, 0)$ prolonge $F^{(n)}_{J,L}(W_1 \ldots W_n)$ quand $W_K \to 0$

En d'autres termes, lorsqu'une trajectoire de zéro disparaît à 0 ou à l'infini, il est possible de prolonger artificiellement l'amplitude de façon continu sans calculer explicitement de nouveaux zéros.

Cette procédure importante sera utilisée pour atteindre les ondes de spin élevé $J > 7/2$.

A P P E N D I C E B-3

-:-

1 - Des coefficients expérimentaux A_ℓ, B_ℓ vers les zéros de $\Sigma(W)$.

Sur le cercle unité représentant la région physique après la transformation conforme $Z = \frac{W + W^{-1}}{2}$ nous avons défini une fonction analytique $\Sigma(W)$ qui coïncide avec les distributions angulaires expérimentales.

Cette fonction analytique $\Sigma(W)$ est approchée par un pseudo-polynôme $S_{2n}(W)$ dont l'ordre dépend des données expérimentales et que nous pouvons considérer comme un polynôme quant à la détermination de ses zéros.

$$S_{2n}(W) = a_0 + a_1 W + \ldots + a_n W^n + \ldots + a_1 W^{2n-1} + a_0 W^{2n}$$

- Les zéros de $S_{2n}(W)$.

Evaluer les zéros de $S_{2n}(W)$ revient à calculer les coefficients a_K, c'est-à-dire à trouver les relations entre les a_K et les coefficients A_ℓ, B_ℓ des distributions expérimentales :

$$\sum_{0}^{2n} a_K W^K = W^n \sum_{\ell=0}^{n} \left[A_\ell \, P_\ell(Z) + \frac{W - W^{-1}}{2} B'_\ell \, P'_\ell(Z) \right]$$

écrivons $$W^n P_\ell\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) = \sum_{K=n-\ell}^{n+\ell} C_{K\ell} W^K$$

$$W^n \left[\frac{W - W^{-1}}{2} P'_\ell \left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right)\right] = \sum_{K=n-\ell}^{n+\ell} D_{K\ell} W^K$$

Les relations entre les polynômes de Legendre nous permettent d'établir des relations de récurrence simple entre les $C_{K\ell}$. On trouve :

$$C_{\ell+1,K} = \frac{2\ell + 1}{2(\ell + 1)} \left[C_{\ell,K+1} + C_{\ell,K-1}\right] - \frac{\ell}{\ell + 1} C_{\ell-1,K}$$

$$D_{\ell,K} = K\, C_{\ell,K}$$

et finalement :

$$a_K = \sum_{K=n-\ell}^{K=n+\ell} \sum_{\ell=0}^{n} C_{\ell,K}\left[A_\ell - i\, K\, B_\ell\right] \qquad (1)$$

2 - Des zéros vers les coefficients A_ℓ, B_ℓ.

Dans la deuxième partie de notre exposé nous avons indiqué comment nous pouvions ajuster les données à l'aide d'une méthode de maximum de vraisemblance, un tel calcul permet notamment d'estimer les coefficients A_ℓ, B_ℓ à partir des zéros significatifs pour représenter nos données expérimentales. Nous donnons ici les formules qui, relie les coefficients du polynôme d'approximation avec A_ℓ, B_ℓ.

On peut écrire :

$$\sum_\ell A_\ell P_\ell(\cos\theta) = \sum_{K=0}^{n} a_K(W^K + W^{-K}) = \sum a_K \cos K\theta$$

en utilisant les relations d'orthogonalité entre P_ℓ et $P_{\ell'}$:

$$A_\ell = \Sigma\, c_{\ell K}\, a_K \quad \text{avec } c_{\ell K} = (2\,\ell + 1) \int_{-1}^{+1} \cos K\theta\; P_\ell(\cos\theta)\; d\cos\theta$$

de même

$$B_\ell = \Sigma\, d_{\ell K}\, a_K \quad \text{avec } d_{\ell K} = \frac{(2\,\ell + 1)}{\ell\,(\ell + 1)} \int \sin K\theta\; P_\ell^1(\cos\theta)\; d\cos\theta$$

Muni de ces relations et sachant que le pseudo-polynôme d'approximation,dont nous savons évaluer les racines, s'écrit :

$$S_n(W) = \sum_K (a_K\, W^K + a_{-K}\, W^{-K})$$

Nous avions finalement :

$$A_\ell = \Sigma\, c_{\ell K}\ \text{Réel}\left[\frac{a_K + a_{-K}}{2}\right]$$

$$B_\ell = -\,\Sigma\, d_{\ell K}\ \text{Imag}\left[\frac{a_K - a_{-K}}{2}\right]$$

-:-

T R O I S I E M E P A R T I E

-:-

ANALYSE

-:-

C H A P I T R E I

-:-

L'ANALYSE EN ONDES PARTIELLES CLASSIQUE.

-:-

I - RAPPELS.

Dans le formalisme de la diffusion $0^- \; 1/2^+ \to 0^- \; 1/2^+$, dont nous avons rappelé l'essentiel dans la seconde partie, les amplitudes $f(\theta)$, $g(\theta)$ sont normalisées de telle manière que nous pouvons écrire :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{K^2}\left(|f|^2 + |g|^2 \sin\theta\right) = \frac{1}{K^2}\sum_n A_n P_n(\cos\theta)$$

$$\vec{p}\,\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\vec{n}\,\frac{2\,\mathrm{Im}\, f^* g \sin\theta}{K^2} = \frac{1}{K^2}\sum_n B_n P_n^1(\cos\theta)\,.\,\vec{n} \qquad (1)$$

Les coefficients A_n, B_n sont alors des fonctions quadratiques simples des diverses amplitudes :

$$A_n = \sum_{i \leqslant j} a_{ij}^n \,\mathrm{Re}\,(T_i T_j^*)$$

$$B_n = \sum_{i \leqslant j} b_{ij}^n \,\mathrm{Im}\,(T_i T_j) \qquad (2)$$

Les coefficients a_{ij}^n, b_{ij}^n ont été tabulés dans la littérature (réf. 18).

Réaliser une analyse en ondes partielles revient donc à déterminer les amplitudes complexes T_j en utilisant les données expérimentales. La théorie nous apprend qu'une amplitude d'ondes partielle T_J décroît exponentiellement lorsque J augmente indéfiniment, de sorte que la méthode habituelle utilisée pour résoudre le système d'équations (2) est de tronquer le développement en ondes partielles en accord avec le nombre de coefficients A_ℓ, B_ℓ mesurés expérimentalement. Autrement dit,pour une réaction dans laquelle nous conservons n ondes partielles, les développements (1) s'arrêtent à l'ordre n-1. La réaction est alors caractérisée par un ensemble de n nombres complexes. Si l'amplitude de transition ne fait intervenir qu'un seul état d'isospin ($T_{\Lambda\pi^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} T^1$) nous aurons à résoudre un système de 2 n-1 équations à 2 n inconnues, 1'équation manquante pour signer un problème à zéro contrainte correspond en fait à une ambiguité générale sur la phase des amplitudes. En principe pour le canal étudié, ici, $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$ nous possédons l'information la plus complète, et nous avons montré (cf. deuxième partie) qu'il existait alors $2^{(n-1)}$ solutions au système d'équations (2) appelés ambiguïtés discrètes. Le grand nombre de solutions possibles et la statistique peu importante conduit la plupart du temps les physiciens à réaliser une analyse dépendante de l'énergie. Le problème revient alors à se donner la forme de la dépendance en énergie pour une ou plusieurs ondes partielles et à déterminer la valeur des paramètres ainsi introduits qui réalisent le meilleur ajustement aux données expérimentales.

II - PARAMETRAGE DES AMPLITUDES. METHODE DE CALCUL.

A) Parametrage des amplitudes.

Pour l'amplitude de diffusion une résonance se comporte comme un pôle dans le plan complexe de l'énergie ($E = E_R - i \frac{\Gamma_R}{2}$) en-dessous de l'axe réel pour préserver la causalité.

De plus cette amplitude posséde la propriété de factorisation de ses résidus qui sont de la forme $\sqrt{xx'} \cdot \Gamma/2$ où x et x' expriment respectivement les rapports d'embranchement de la résonance dans l'état initial et final de la réaction et Γ est la largeur totale de la résonance observée.

Finalement, pour la réaction $\bar{K}^- p \to \pi^\circ \Lambda$, nous décrirons une résonance à l'aide d'une formule de Breit-Wigner :

$$T_R = \pm \frac{\sqrt{xx'}\ \Gamma/2}{E_R - E - i\,\Gamma/2}$$

avec $x = \frac{\Gamma_{\bar{K}N}}{\Gamma}$ $\quad x' = \frac{\Gamma_{\Lambda\pi^\circ}}{\Gamma}$

Le signe + ou - est lié à la classification dans le groupe SU_3 et correspond à une phase de 0 ou de π.

Pour chaque valeur de j et ℓ les amplitudes $T_{j\ell}$ sont astreintes à vérifier la condition d'unitarité qui, dans le cas d'une réaction inélastique, s'écrira :

$$|T_j|^2 < \frac{1}{4}$$

Par conséquent en représentant les amplitudes dans le plan complexe (diagramme d'Argand) les amplitudes à deux corps inélastiques sont situées à l'intérieur du cercle de rayon 1/2 centré à l'origine. Le maximum du module de l'amplitude à la résonance ne peut dépasser 1/2.

Le paramétrage des amplitudes non résonnantes, nous l'avons déjà vue dans notre première partie, peut varier suivant les auteurs et prendre des formes plus ou moins compliqués (cf. chapitre III, première partie).

B) Méthode de calcul.

Une fois les amplitudes paramétrées les formules (2) nous permettent de reproduire les coefficients A_n, B_n. Connaissant les coefficients expérimentaux nous estimons la valeur prédictive de notre modèle en calculant un chi-carré :

$$\chi^2 = \sum_n \frac{(A_n^{Th} - A_n^{Exp})^2}{\sigma_n^2} + \sum_n \frac{(B_n^{Th} - B_n^{Exp})^2}{\sigma_n^2}$$

La sommation tient compte de tous les coefficients, σ_n est l'erreur statistique qui entache les coefficients expérimentaux. La méthode consiste en la recherche du minimum de la variable χ^2 qui correspond au meilleur ajustement. Cependant l'unicité de ce minimum n'est pas toujours évidente et, dans la pratique le choix entre diverses hypothèses se fait par comparaison des divers χ^2 obtenus.

Pour terminer ce paragraphe concernant l'analyse en ondes partielles classique nous donnerons les résultats de ce type d'analyse effective pour le canal $K^- p \to \Lambda \pi^\circ$ entre 2,1 et 2,45 GeV d'énergie dans le centre de masse (réf. 3).

III - RESULTATS DE L'ANALYSE CLASSIQUE.

Mon propos, ici, n'est pas de discuter en détail l'analyse réalisée dans le cadre de l'expérience C.S. (réf. 3), mais je voudrais en présenter les résultats et la démarche pour les obtenir. Nous pourrons alors comparer avec la méthode que nous proposons dans ce travail et montrer leur complémentarité.

Notre paramétrage pour les amplitudes de fond est un paramétrage polynomial :

$$T_B = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n P_n(X)$$

où $P_n(X)$ est un polynôme de Legendre et X une fonction linéaire de l'impulsion incidente normalisée à -1 et +1 pour les valeurs extrêmes de l'impulsion.

Un fond linéaire (N = 1) pour toutes les ondes de S1 à H9 donne un chi-carré rapporté au nombre de degrés de liberté de l'ordre de 1,6 ce qui, a priori, ne correspond pas à un bon ajustement. En fixant N = 4 pour chaque onde, une par une, et N = 1 pour toutes les autres, nous constatons une chute du χ^2 sensible ($\chi^2/n \sim 1,3$) pour les ondes P_3, D_5, F_7, G_9 et H_{11}. Si maintenant nous remplaçons le paramétrage de l'amplitude par une forme de Breit-Wigner on obtient essentiellement deux groupes de solution, le premier

en faveur d'états résonnants dans les ondes P_3 ou D_5 à une masse comprise entre 2190 et 2260 MeV, le second exhibant des ondes G_9 ou H_{11} susceptibles de résonner vers 2210 MeV.

Nous avons ensuite essayé les 4 possibilités de combiner les ondes $P_3\ G_9$, $P_3\ H_{11}$, $D_5\ G_9$, $D_5\ H_{11}$, puis constaté que la présence d'une onde D_5 résonnante n'excluait pas une onde résonnante dans P_3 ; notre meilleur ajustement a été obtenu en gardant P_3, D_5, G_9 résonnants (cf. Tableau I). La conclusion que nous pouvons tirer d'une telle analyse est qu'elle est pour le moins délicate, à vrai dire nous ne pouvons pas vraiment exclure une solution où H_{11} remplacerait G_9.

La complexité de la situation que nous venons de schématiser ici et l'absence de données systématiques dans cette région nous font mieux comprendre la variété des résultats obtenus dans des analyses de ce genre (réf. 19) concernant la structure vue sur la section efficace aux environs de 2250 MeV qui indique clairement la présence d'au moins une résonance.

P_3		D_5	G_9	H_{11}	F_7	χ^2 pour 198 ND	
Γ	$\sqrt{xx'}$						
180,+	.19	2260, 100, .12	2215, 60, -.09	-	2030,170,.18	195	FIT A
"		"	-	2210,60,-.09	"	205	FIT B
"		"	-	-	2215,60,-.075	225	FIT C

Tableau I

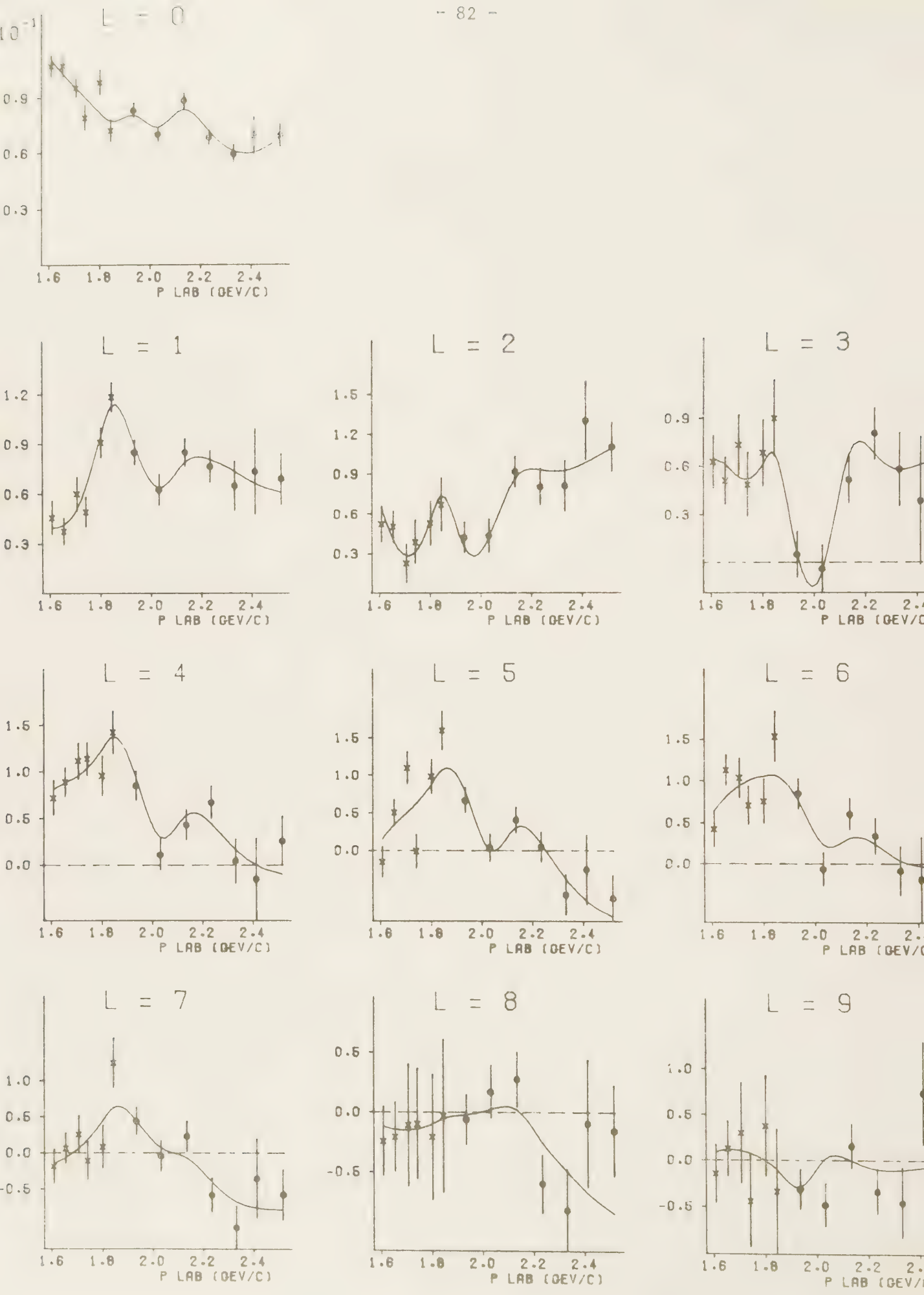
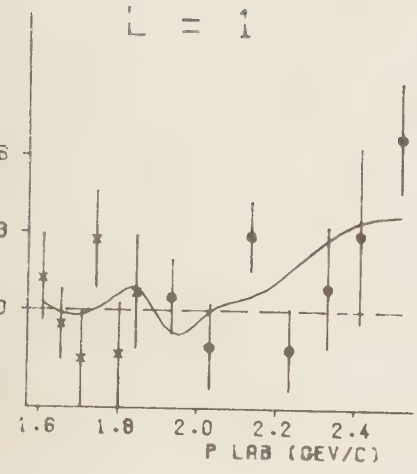
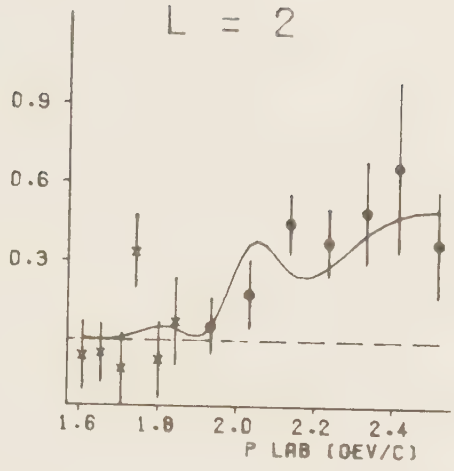
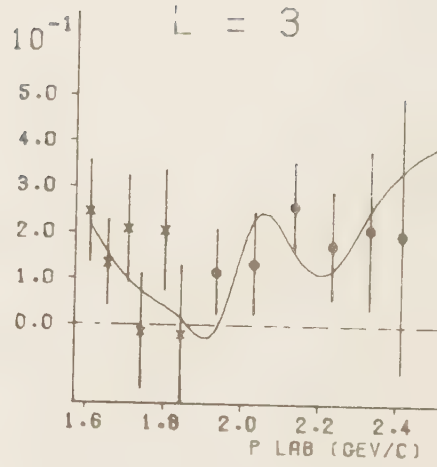
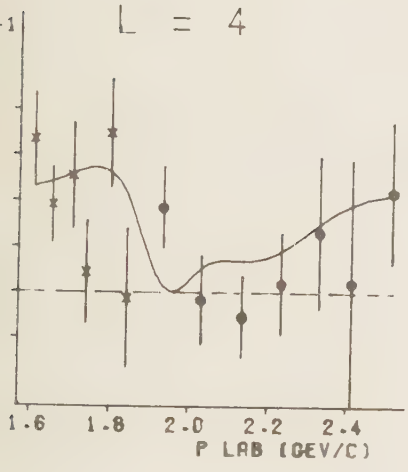


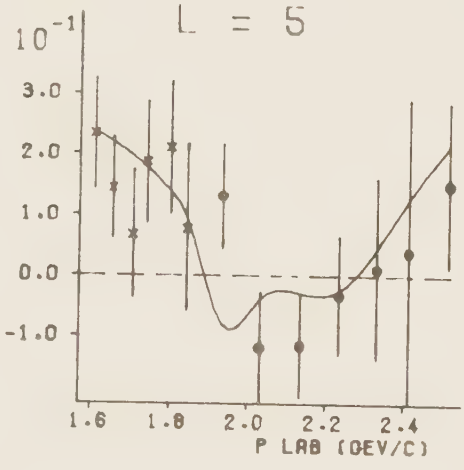
Fig. 9a

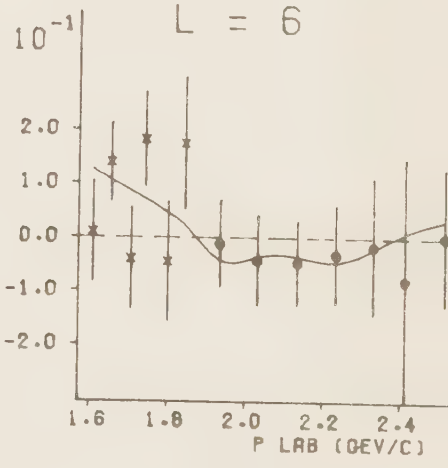

L = 1
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)

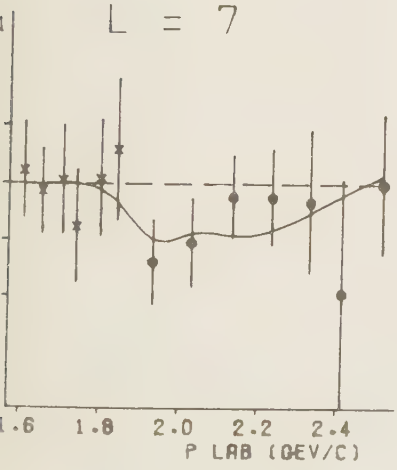

L = 2
0.9
0.6
0.3
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)

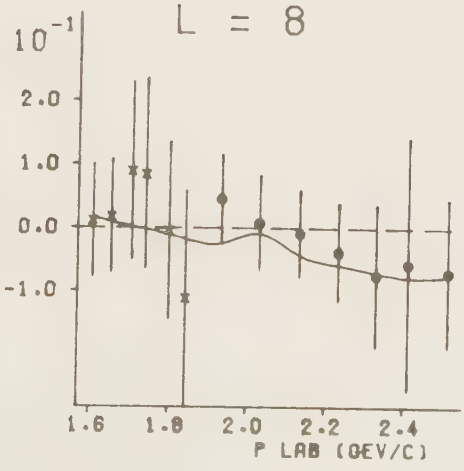

L = 3
10^{-1}
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)


L = 4
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)


L = 5
10^{-1}
3.0
2.0
1.0
0.0
-1.0
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)


L = 6
10^{-1}
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)


L = 7
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)


L = 8
10^{-1}
2.0
1.0
0.0
-1.0
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)

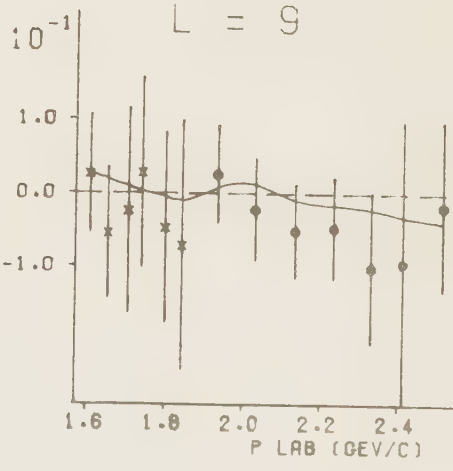

L = 9
10^{-1}
1.0
0.0
-1.0
1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
P LAB (GEV/C)

Fig. 9b

C H A P I T R E I I

-:-

LES ZEROS, OUTILS DE L'ANALYSE EN ONDES PARTIELLES.

-:-

Nous venons de montrer sur un exemple précis comment s'effectuait une analyse en ondes partielles dépendante de l'énergie, et avec quelle prudence devait se faire l'interprétation des résultats en raison de l'incertitude introduite par la paramétrisation des amplitudes et du degré de confiance obtenu (χ^2/n_D) qui, bien souvent, est assez faible.

Le point de vue adopté par Barrelet et dont nous avons tracé les grandes lignes dans le deuxième chapitre, nous a conduit à considérer les zéros de l'amplitude en fonction de l'énergie comme les nouveaux paramètres à déterminer expérimentalement. Ce paragraphe sera consacré à notre technique d'analyse indépendante de l'énergie appliquée à la réaction $K^- p \to \pi^\circ \Lambda$.

I - LES DONNEES ET LES ZEROS.

Dans la deuxième partie nous avons proposé une méthode objective de représentation des données à l'aide des zéros, cette méthode nous l'avons utilisé chaque fois qu'elle était possible c'est-à-dire lorsque nous avions en notre possession les distributions angulaires et les poids de chaque évé-

nement, autrement dit pour les expériences réalisées avec la collaboration du Collège de France de 1900 à 2450 MeV. Pour les énergies disponibles entre 1540 et 1900 MeV ainsi que pour celles de provenance diverses (cf. première partie), recouvrant la zone 1900 - 2450 MeV, nous avons évalué les zéros à l'aide des coefficients expérimentaux A_ℓ, B_ℓ significatifs.

Cependant avec les zéros ainsi obtenus et compte tenu de l'imprécision sur leur position (cf. deuxième partie), il est difficile d'effectuer un lien unique d'une énergie à l'autre de façon à obtenir des trajectoires dans le plan complexe de la variable W.

En raison de l'absence de tout modèle théorique qui nous aurait permis d'ajuster ces trajectoires, nous nous sommes résolus à lisser directement les coefficients A_ℓ, B_ℓ.

Dans la pratique, la démarche que nous avons adoptée, pour utiliser nos données sous forme de trajectoires de zéros, est la suivante :

1 - Calcul des zéros bruts à partir des coefficients expérimentaux.

2 - Ajustement des coefficients expérimentaux A_ℓ, B_ℓ à l'aide de fraction rationnelle $\frac{P(E)}{Q(E)}$ où E est l'énergie dans le centre de masse.

3 - Calcul des zéros à partir d'un tel lissage.

4 - Contrôle des trajectoires lissées ainsi obtenues en examinant les trajectoires expérimentales.

Avant d'entreprendre notre analyse et puisque nous devrons souvent nous y référer nous allons décrire l'ajustement des A_ℓ, B_ℓ.

- Description du lissage.

Les données dont nous disposons sous forme de coefficients A_ℓ, B_ℓ sont représentées en fonction de l'énergie dans le centre de masse (Fig. 4) et, nous pouvons remarquer, malgré une bonne continuité entre les diverses expériences, un certain nombre de fluctuations statistiques locales. Il est très vraisemblable par conséquent qu'il nous sera difficile de lier en trajectoires les zéros de l'amplitude calculés à partir de tels coefficients.

Nous avons alors estimé qu'il serait souhaitable d'effectuer un lissage des coefficients A_ℓ, B_ℓ ; étant donné l'importance d'une telle opération puisque les trajectoires de zéros vont en dépendre nous la détaillerons dans ce paragraphe.

Les distributions angulaires de production $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \Sigma\ A_\ell\ P_\ell(\cos\theta)$ et de polarisation $P\ \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \Sigma\ B_\ell\ P^1_\ell(\cos\theta)$ présentent des structures caractéristiques de la réaction étudiée qui se retrouvent dans la variation des coefficients A_ℓ, B_ℓ en fonction de l'énergie (Fig. 4). De façon à décrire ces structures nous avons ajusté les A_ℓ, B_ℓ à l'aide de fractions rationnelles $\frac{P(E)}{Q(E)}$ (où $E = \sqrt{S}$ est l'énergie totale disponible dans le centre de masse). Les creux et les bosses visible sur les distributions expérimentales sont assimilables à des zéros ou des pôles complexes dont les parties réelles et imaginaires sont respectivement liées à la position et à la largeur.

Notre ajustement s'est déroulé en deux étapes :

Considérant les A_ℓ, B_ℓ comme des fonctions expérimentales de l'énergie,nous en avons estimé les zéros et les pôles significatifs à l'aide d'une représentation par des polynômes orthogonaux sur tout l'intervalle d'énergie disponible. Muni d'un ensemble de zéros et de pôles complexes pour chaque coefficient A ou B, et, les prenant comme paramètres initiaux, nous avons finalement ajusté les coefficients expérimentaux à l'aide d'une fraction rationnelle :

Coefficient	Pôles nécessaires			d°P/d°Q	χ^2/n
A_0	1,665 ± i ,015	1,779 ± i ,072	2,04 ± i ,17 2,287 ± i ,10	14/8	2,10
A_1	1,66 ± i ,040	1,740 ± i ,030	1,903 ± i ,07	16/6	1,79
A_2	1,665 ± i ,015	1,766 ± i ,052	2,002 ± i ,14 2,277 ± i ,069	12/8	2,05
A_3	1,612 ± i ,060		2,00 ± i ,061 2,155 ± i ,156	17/6	1,75
A_4	1,640 ± i ,023	1,750 ± i ,060	2,130 ± i ,126	17/6	1,23
A_5			2,156 ± i ,070	14/2	1,7
A_6			2,040 ± i ,100	8/2	,86
A_7			2,150 ± i ,135	12/2	,51
A_8			2,36 ± i ,03	12/2	,04
B_1		aucun		14	1,92
B_2		aucun		18	1,2
B_3		1,8 ± i ,09		14/2	1,4
B_4		1,760 ± i ,67	2,030 ± i ,07	7/4	1
B_5			2,040 ± i ,07	10/2	,86
B_6			1,934 ± i ,45	9/4	,77
B_7			2,006 ± i ,121	11	,63
B_8				11	,03

Tableau II

$$\frac{P(E)}{Q(E)} = \frac{\prod_{i=1}^{p} (E - E_i)}{\prod_{j=1}^{q} (E - E_j)}$$

Le résultat de cet ajustement est représenté sur les figures 4. Nous possédons dès lors une représentation analytique des coefficient A_ℓ, B_ℓ qui nous permet de prendre autant de points que l'on veut dans l'intervalle d'énergie disponible et par suite de reconstruire des trajectoires de zéros avec une grande précision.

Notre ignorance de la forme des amplitudes non résonnantes et le grand nombre d'interférences rend difficile à interpréter la variation avec l'énergie de l'ensemble des coefficients. Cependant l'ajustement sous forme de fraction rationnelle que nous avons effectué et l'allure de certains coefficients caractéristiques permettent de détecter la formation de résonances éventuelles.

A titre indicatif sur le tableau II nous donnons en regard de chaque coefficient A_ℓ, B_ℓ les pôles complexes nécessaires à l'ajustement, les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur de la fraction utilisée et la valeur du chi-carré rapporté au nombre de degrés de liberté (χ^2/n_D).

Dans l'ensemble les caractéres essentiels des coefficients expérimentaux sont bien reproduits. Connaissant (cf. formule 2) les relations entre les A_ℓ, B_ℓ d'une part,et les amplitudes $T_{j\ell}$ et spin j et de moment orbital ℓ d'autre part, nous pouvons faire une étude qualitative des résultats expérimentaux que nous allons utiliser.

En dessous de 1,9 GeV, la compatibilité avec zéro des coefficients A_5, B_5 et suivants indique qu'il n'existe pas d'amplitudes importantes de moment angulaire total $j > \frac{5}{2}$; en revanche le comportement des coefficients d'ordre inférieur permet de penser qu'une onde partielle passe par une résonance vers 1760 MeV avec un moment angulaire total $j = \frac{5}{2}$ étant donné la forme des coefficients A_4 et B_4. Le pôle vers 1660 MeV présent dans notre ajustement sert à reproduire un épaulement dans le A_0 et une structure étroite dans le A_1.

Entre 1,9 et 2,1 GeV, comme dans le zone précédente, le fait que les coefficients A_9, B_9 et suivants soient nuls implique l'absence d'ondes importantes avec $j > \frac{9}{2}$. Les structures visibles dans A_6 et B_6 et le maximum dans le A_0 suggèrent un état de spin 7/2 entre 2000 et 2060 MeV.

Au-delà de 2,1 GeV les coefficients A_ℓ, B_ℓ présentent une variation rapide autour de 2250 MeV qui indique l'existence d'au moins une résonance à cette énergie.

Ces quelques résultats qualitatifs nous ont permis de retrouver la présence de deux résonances bien établies le $\Sigma(1760)$ et $\Sigma(2030)$ qui en raison de leur couplage élevé au canal $\Lambda\,\pi^\circ$ respectivement ,28 et ,20, nous servirons de référence dans l'analyse qui va suivre.

II - DE 1540 A 1860 MeV.

Dans cette gamme d'énergie nous disposons d'une quarantaine de points expérimentaux provenant essentiellement de la collaboration C.E.R.N.-Heidelberg - Saclay (réf. 1). Les coefficients A_n, B_n ont été calculés jusqu'à l'ordre n = 4 entre 1580 et 1750 MeV puis, jusqu'à l'ordre n = 5 de 1750 à 1860 MeV, fixant ainsi le degré maximum du polynôme d'approximation $S_{2n}(W)$. Les coefficients A_5 et B_5 sont compatibles avec zéro par conséquent le cinquième zéro est un zéro lointain, son importance est négligeable. Pratiquement depuis 1580 MeV, nous avons pu reconstruire quatre trajectoires de zéros significatifs et en déduire les amplitudes des ondes S_1, P_1, P_3, D_3, D_5 sachant que l'onde D_5 résonne à 1765 MeV (réf. 6).

Les trois paragraphes qui vont suivre sont destinés à expliquer notre démarche :

- Relier les positions d'un même zéro par continuité d'une énergie à l'autre pour former une trajectoire.

- Choix d'une solution convenable, c'est-à-dire comportant le $\Sigma(1765)$.

- Résultats fournis par le lissage des coefficients.

A) Les trajectoires expérimentales.

Nous avons indiqué dans le deuxième chapitre comment le calcul des zéros de l'amplitude se ramenait au calcul des racines d'un polynôme à coefficients réels $S_{2n}(W) = \sum_{K=0}^{2n} \alpha_K W^K$, ce que nous avons fait par l'intermédiaire d'un programme de recherche des racines d'un polynôme (CNPOLY). Nous avons aussi, d'après l'expression de la section efficace polarisée $\Sigma(W) = F(W)\,\overline{F(\bar{W}^{-1})}$, que les zéros de $\Sigma(W)$ vont par paire $(W_i, \bar{W}_i^{-1})$, un zéro de chaque paire étant un zéro de l'amplitude $F(W)$ autrement dit nous pouvons choisir un zéro dans chaque paire par exemple celui dont le module est inférieur à 1.

A chaque énergie ($E = \sqrt{S}$) nous avons calculé 4 zéros à l'intérieur du cercle unité et après avoir choisi une distance entre deux points du plan complexe $d_{ij} = |W_i(E) - W_j(E + \Delta E)|^2$, nous avons pour chaque zéro $W_i(E)$ cherché son plus proche voisin, parmi tous les autres, à l'énergie adjacente. Les trajectoires résultantes de cette méthode sont représentées sur la figure 10, un examen de ces trajectoires nous conduit à faire les trois remarques suivantes :

1 - Les deux trajectoires baptisées a et b(*) sont nettement découplées et semblent correspondre à des zéros présents depuis 1.540 MeV.

2 - Les deux trajectoires c et d situées dans le demi-cercle supérieur s'entrelacent et, compte tenu de l'incertitude sur la position des zéros que nous avons déjà évalué (cf. deuxième

---

(*) - Dans la suite du texte nous adopterons la convention d'écriture suivante : Une trajectoire sera baptisée d'une lettre minuscule (a) lorsqu'elle est intérieure au cercle unité, de cette même lettre surmontée d'une barre ($\bar{a}$) si elle est extérieure au cercle ; enfin nous indicerons la lettre (a_c) si la trajectoire traverse le cercle unité.

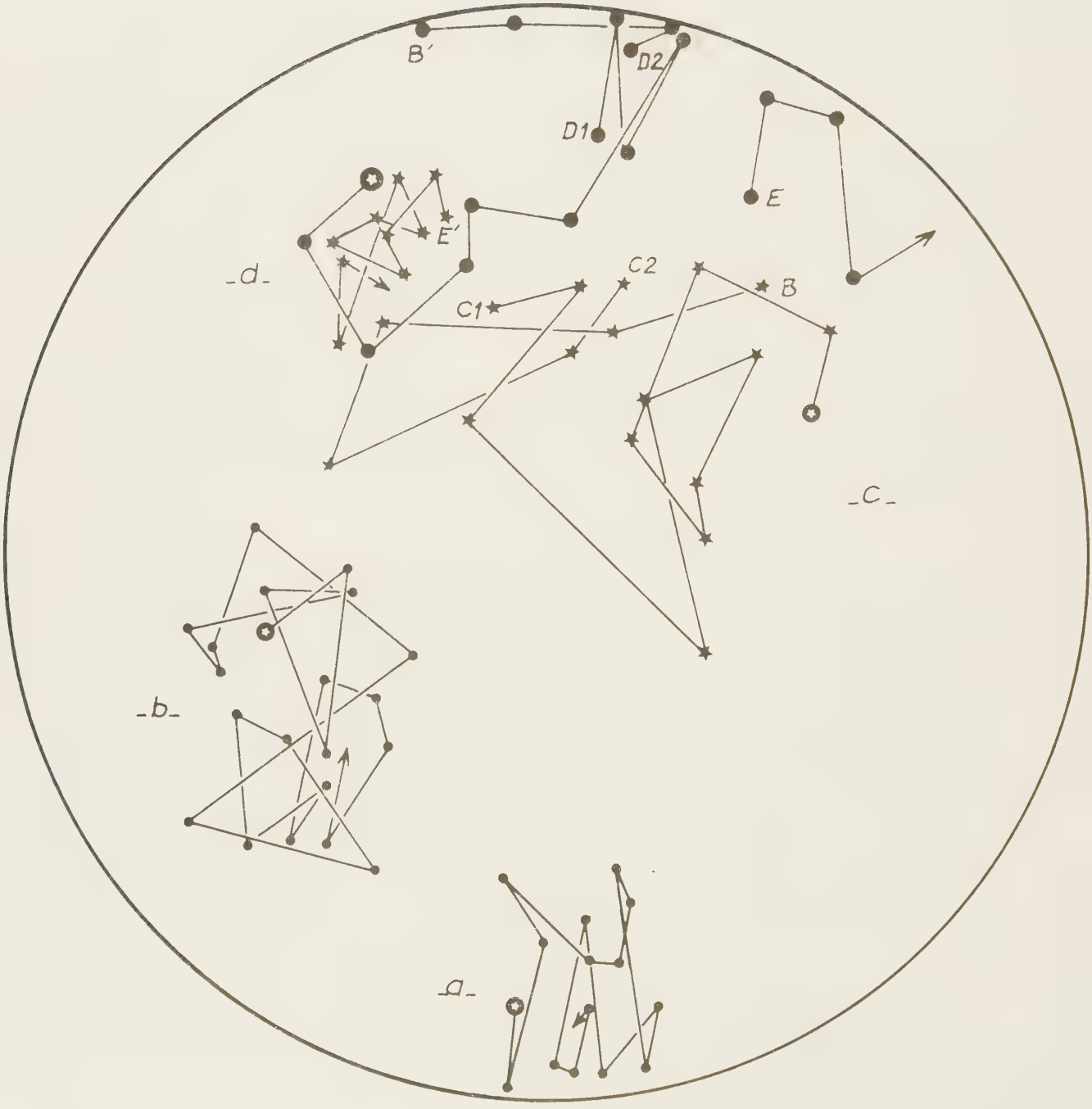


Fig. 10

partie), les quadrilatères C_1 B D_1 B', C_2 E D_2 E', nous indiquent que la continuité n'est pas unique pour la trajectoire c aux points C_1 et C_2 et pour la trajectoire d aux points D_1 et D_2.

3 - Enfin, si l'on admet que les trajectoires a et b sont présentes dès 1.540 MeV, les deux trajectoires c et d en revanche sont lointaines de 1540 à 1610 MeV, puis commencent à jouer un rôle.

B) Choix d'une solution.

Muni de quatre trajectoires de zéros W(E) et par conséquent de leurs conjuguées par rapport au cercle unité notées $W(E) = \overline{W(E)}^{-1}$, nous sommes en mesure de reconstruire les 16 ambiguïtés discrètes correspondantes au 2^4 façons de choisir une trajectoire ou sa conjuguée.

Cependant dans un souci d'objectivité pour ne laisser aucune éventualité dans l'ombre et parce que nous voulons essayer une nouvelle méthode d'analyse, nous avons du tenir compte des quatre choix possibles mentionnés dans le paragraphe précédent, pour la continuité des trajectoires c et d. Au total nous avons examiné 64 solutions exhibant la variation en fonction de l'énergie des modules carrés des amplitudes d'ondes partielles S_1, P_1, P_3, D_3, D_5 affectés de leurs erreurs (cf. deuxième partie).
Nous avons numéroté de I à IV les choix de continuité possible pour les trajectoires c et d.(*)

Une amplitude purement résonnante s'écrit (cf. chapitre II) :

$$T_R = \frac{t}{\varepsilon - i} \quad \text{avec } t = \sqrt{xx'} = \sqrt{\frac{\Gamma\ \Gamma'}{\Gamma_T^2}} \quad , \quad \varepsilon = (M_R - E)/\Gamma_R/2$$

Pour le $\Sigma(1765)$ nous attendons, dans le canal $\Lambda\ \pi^\circ$, un couplage t de l'ordre de .3, cette valeur nous servira de référence pour estimer la présence ou l'absence du $\Sigma(1765)$.

(*) - Choix I : $\widehat{C_1B}$ $\widehat{C_2E'}$ $\widehat{D_1B'}$ $\widehat{D_2E}$
II $\widehat{C_1B}$ $\widehat{C_2E}$ $\widehat{D_1B'}$ $\widehat{D_2E}$
III $\widehat{C_1B'}$ $\widehat{D_2E}$ $\widehat{D_1B}$ $\widehat{C_2E'}$
IV $\widehat{C_1B}$ $\widehat{D_2E'}$ $\widehat{D_1B}$ $\widehat{C_2E}$

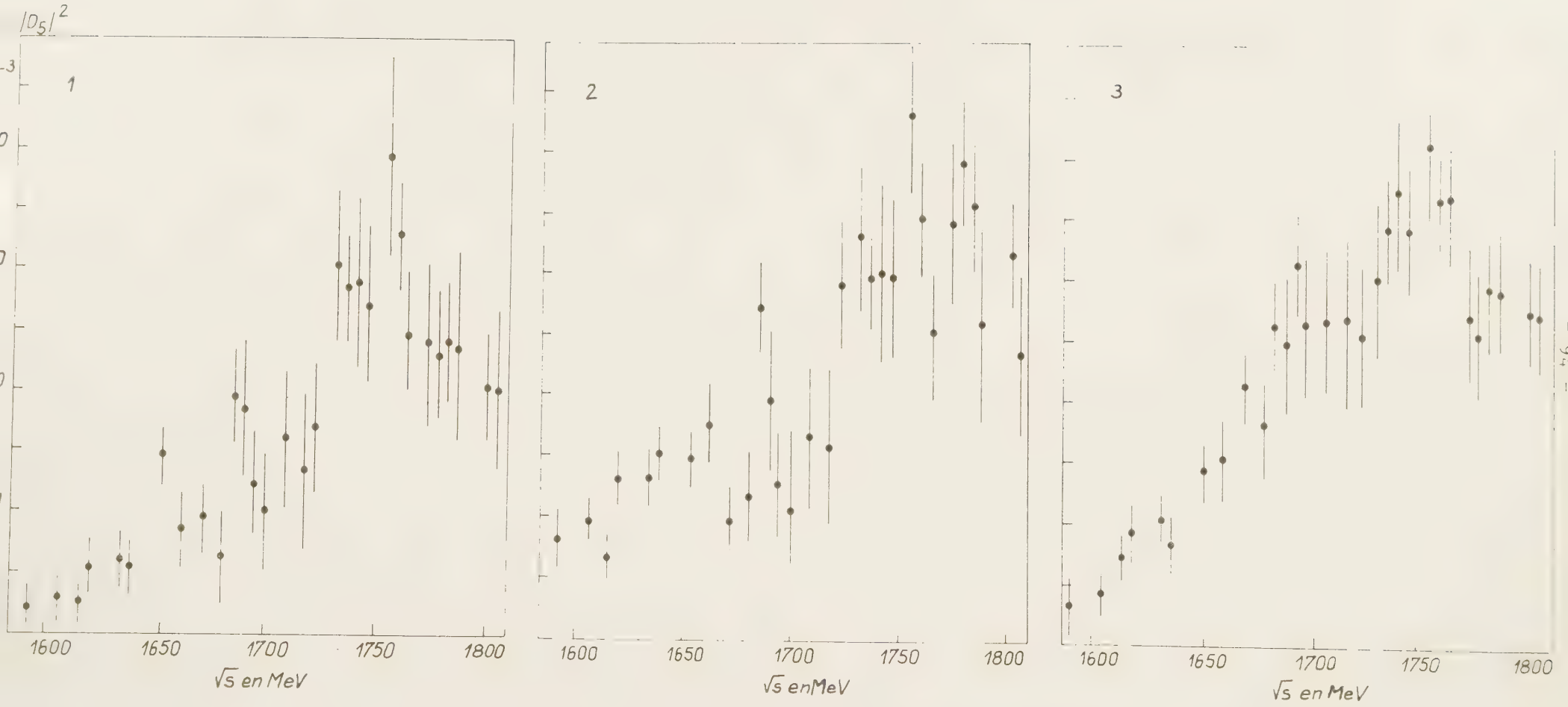


Fig. 11

Les choix II, III et IV ne donnent aucune indication pour une solution acceptable, soit les solutions correspondantes mettent en évidence une structure dans l'onde D_5 avec un couplage de l'ordre de ,1 tiers de la valeur mondialement admise, soit elles présentent de brutales discontinuités dans les amplitudes traduisant un saut d'une trajectoire de zéro à une autre, effet sur lequel nous reviendrons dans la suite de notre exposé.

Le choix I en revanche fournit trois solutions possibles sur 16 (Fig. 11), la première nous montre un D_5 ornée d'une bosse vers 1690 MeV, la seconde présente une onde D_5 qui est discontinue au départ, la troisième enfin, que nous conserverons,à le mérite de présenter une onde D_5 dont le module carré au moins présente les bonnes caractéristiques.

Examinons plus attentivement ces trois solutions :

La première correspond aux trajectoires d et a extérieures au cercle. La seconde correspond à la trajectoire a extérieure au cercle, d intérieure. La troisième correspond à la trajectoire d extérieure au cercle. Ce détail nous permet de vérifier concrétement ce que nous avions prédit sur l'apparition des zéros et la continuité des amplitudes (Appendice B-2). En effet, nous l'avons vu les trajectoires a et b sont présentes depuis 1540 MeV mais, au contraire, les trajectoires c et d apparaissent. Comme il nous est difficile d'étiqueter chronologiquement les trajectoires en question, nous attendons, a priori, des solutions du type : trajectoire c extérieure, d intérieure, ou l'inverse, suivant l'ordre d'apparition vrai de la trajectoire. Or parmi les trois solutions que nous venons de retenir, la seule qui présente une discontinuité à l'origine est justement celle où d et c sont intérieures ; mieux, puisque finalement nous retenons la troisième solution nous pouvons dire que la trajectoire d semble correspondre au 4^e zéro qui, comme la règle énoncée dans l'appendice B-2 le prescrit,doit venir de l'infini.

Nous retiendrons deux aspects opposés de cette ébauche d'analyse : affranchis de toute paramétrisation des amplitudes avec un temps de calcul réduit, puisqu'il faut de l'ordre de 30 secondes de C.D.C. 6600 pour calculer 4 zéros, les relier en trajectoires et reconstruire seize fois 5 amplitudes, nous avons pu sélectionner une solution compatible avec les résultats connus. En revanche une des vertus essentielles de notre technique qui est la mise en évidence des trajectoires de zéros présente des difficultés si l'on s'en tient

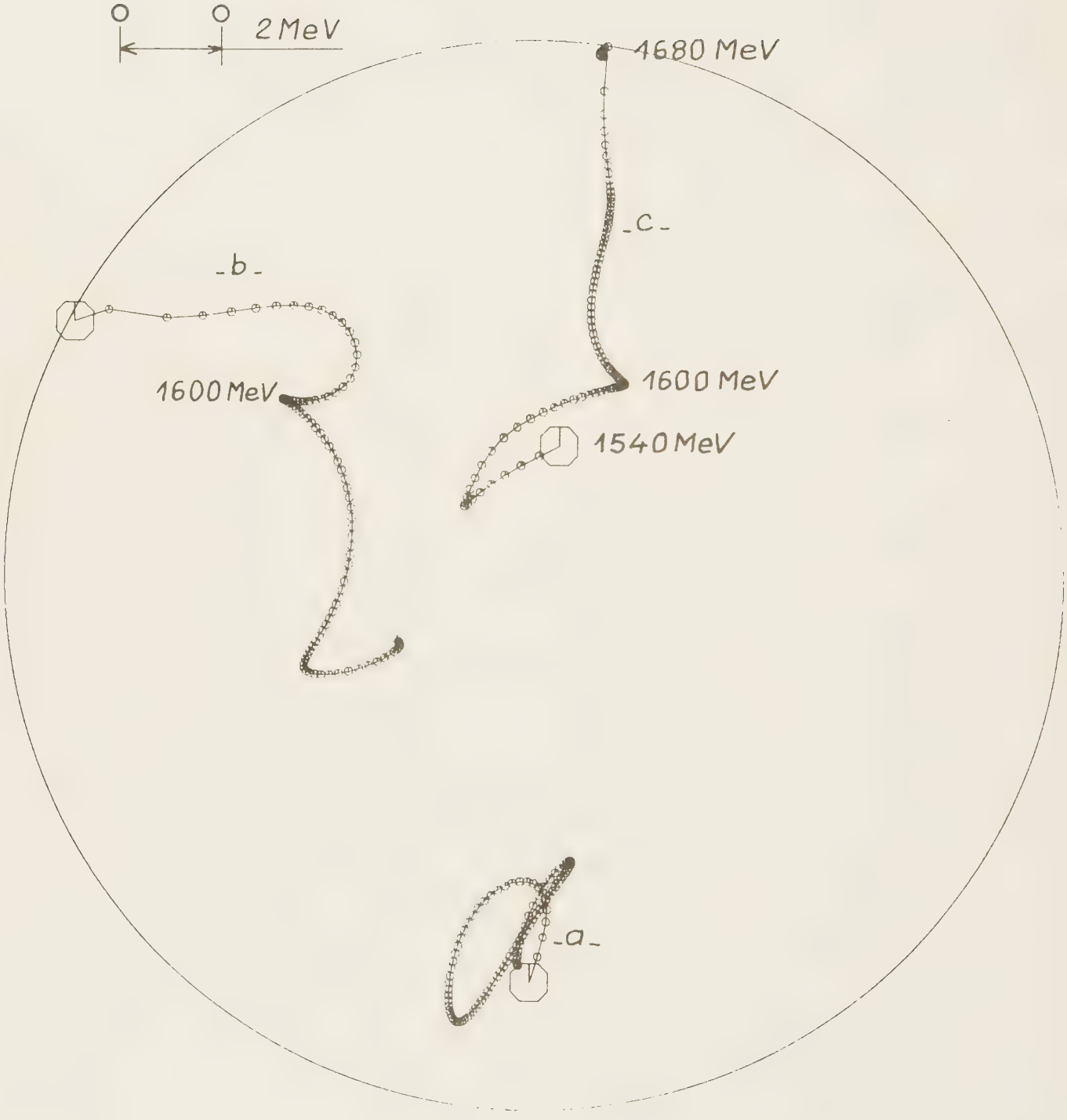
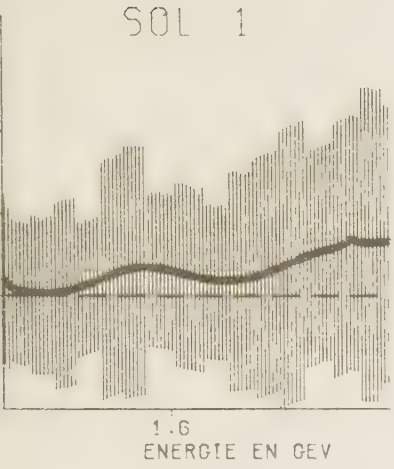
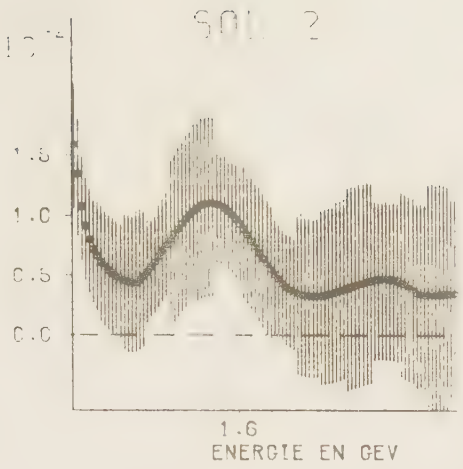
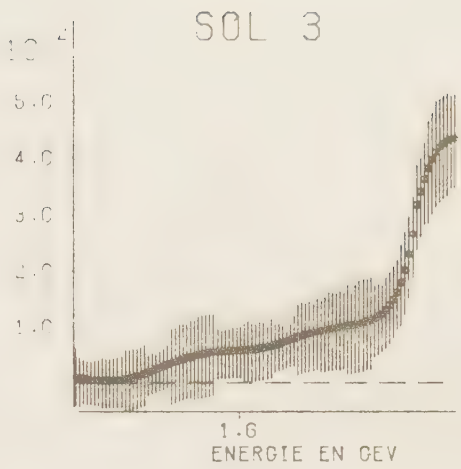
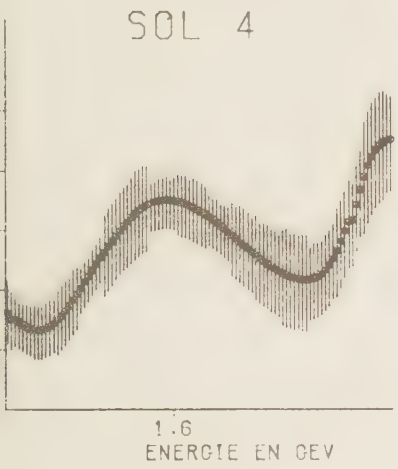


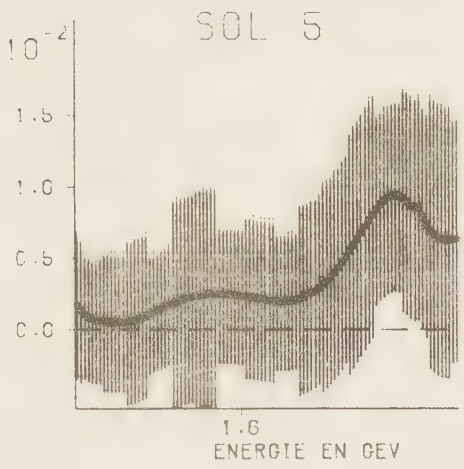
Fig. 12

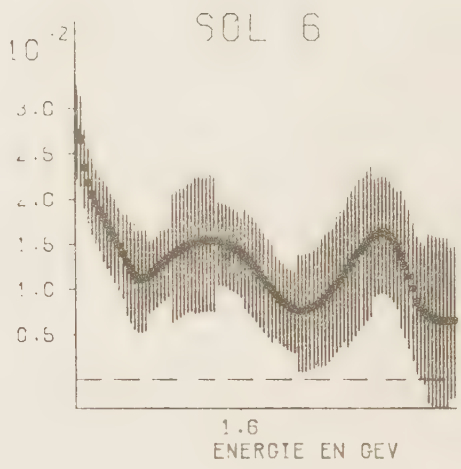

SOL 1
1.6
ENERGIE EN GEV

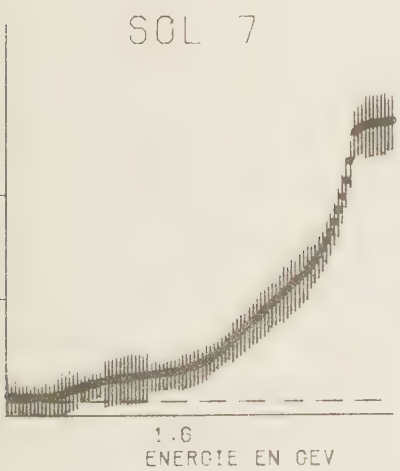

SOL 2
1.6
1.0
0.5
0.0
1.6
ENERGIE EN GEV


SOL 3
5.0
4.0
1.0
1.6
ENERGIE EN GEV


SOL 4
1.6
ENERGIE EN GEV


SOL 5
1.6
1.0
0.5
0.0
1.6
ENERGIE EN GEV


SOL 6
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1.6
ENERGIE EN GEV


SOL 7
1.6
ENERGIE EN GEV

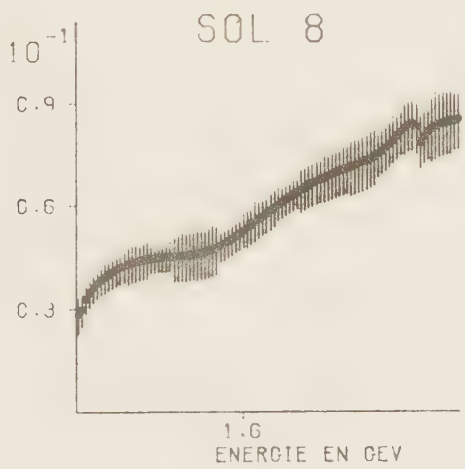

SOL 8
0.9
0.6
0.3
1.6
ENERGIE EN GEV

Fig. 13

C) Trajectoires lissées.

Le lissage des coefficients A_n, B_n déjà discuté (cf. A nous a permis d'interpoler des valeurs pour les coefficients A_4, B_4 entre 1540 et 1580 MeV, rendant possible l'obtention de 4 trajectoires de zéros dès le début de la zone étudiée. Cependant nous avons voulu examiner avec attention le comportement des ondes de spin total inférieur à 5/2 pour les énergies les plus basses de notre zone, pour cela nous avons considéré deux possibilités :

1 - trois trajectoires de zéros jusqu'à 1680 MeV énergie à laquelle A_4 devient significatif.

2 - quatre trajectoires de zéros de bout en bout avec comparaison aux trajectoires expérimentales et étude du problème lié à l'apparition du 4^e zéro.

1 - Trois trajectoires.

Clairement sur la figure 12, où nous avons baptisé a, b, c les trajectoires, nous pouvons constater l'apparition de la trajectoire c cette trajectoire étant d'ordre impair nous nous attendons à trouver une solution continue pour les amplitudes d'ondes partielles du type trajectoires a et b intérieures ou extérieures au cercle, mais trajectoire c intérieure. Nous vérifions aisément ce principe en examinant les 8 solutions possibles pour l'onde D_3 fig. 13, les seules solutions continues sont les solutions 1, 3, 5, 7 qui correspondent à la trajectoire c intérieure au cercle unité. Sans aucune autre hypothèse nous devrions considérer ces 4 solutions ambiguës et essayer de n'en conserver qu'une en se livrant à une étude qualitative du comportement des coefficients A_n et B_n, cela serait possible, mais ne pourrait s'appliquer à des énergies plus élevées, le nombre des coefficients significatifs croissant avec l'énergie. Nous utiliserons alors les résultats connus, par exemple entre 1540 et 1680 MeV un seul état résonnant est considéré comme bien établi : le $\Sigma(1660)$, de spin-parité $3/2^-$ et dont la

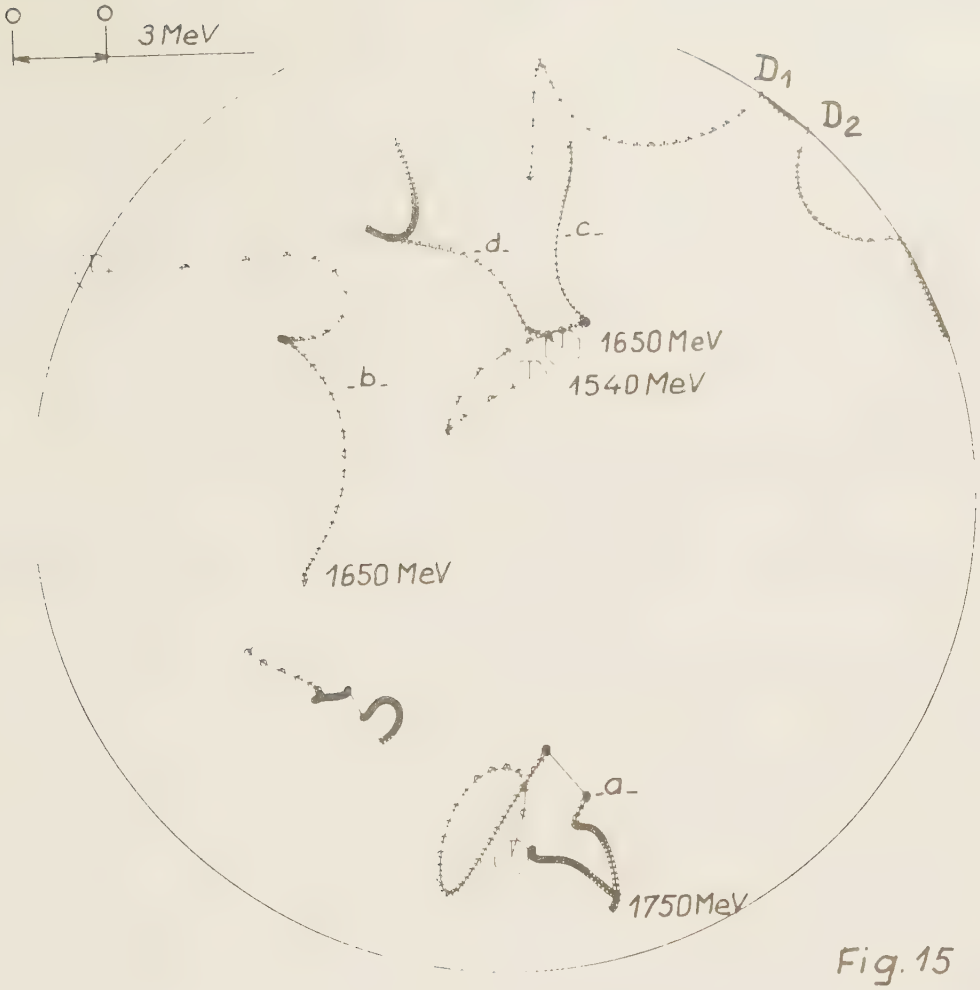

3 MeV
D1
D2
c
d
1650 MeV
1540 MeV
b
1650 MeV
a
1750 MeV

Fig. 15

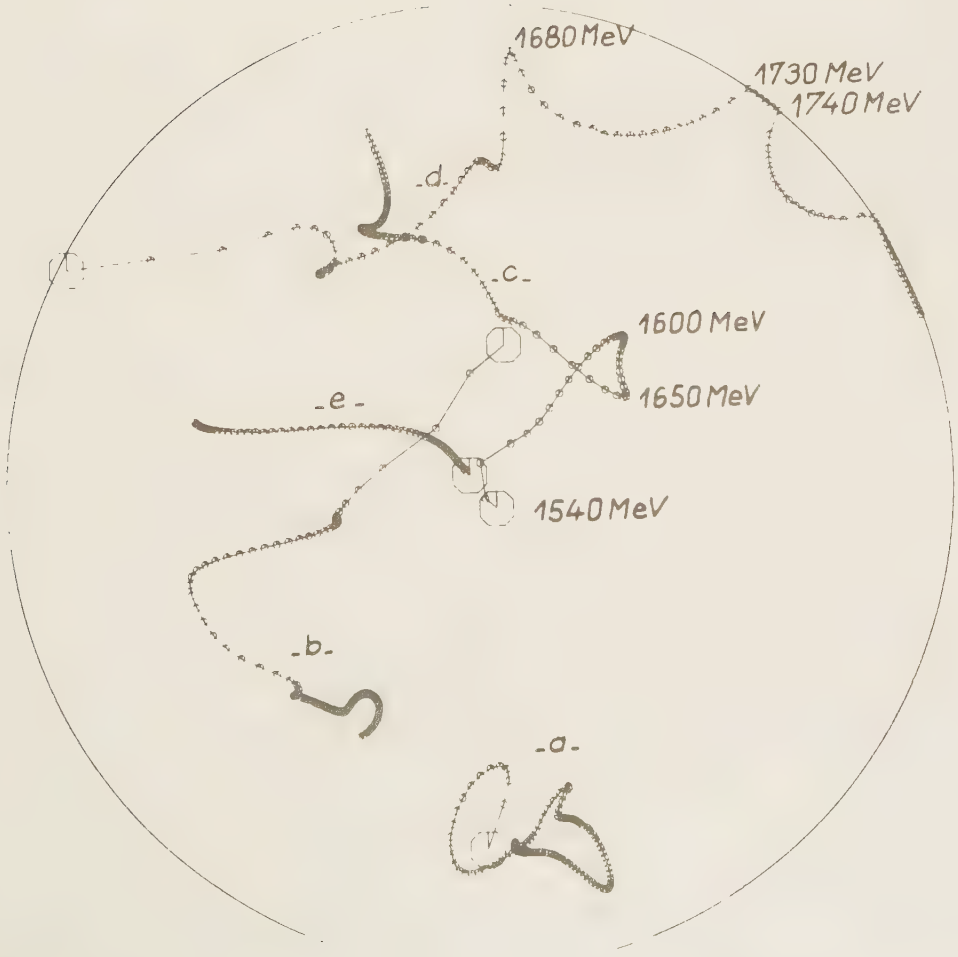

1680 MeV
1730 MeV
1740 MeV
d
c
1600 MeV
1650 MeV
e
1540 MeV
b
a

Fig. 14

valeur admise du couplage au canal $\Lambda\,\pi^\circ$ est $\sqrt{xx'} = .1$. Parmi les 4 solutions ambiguës reconstruites la seule correspondant à cette résonance est la solution numéro 5, en effet le module carré de l'amplitude d'isospin 1 maximum pour 1656 MeV , vaut : $xx' \sim 10^{-2}$.

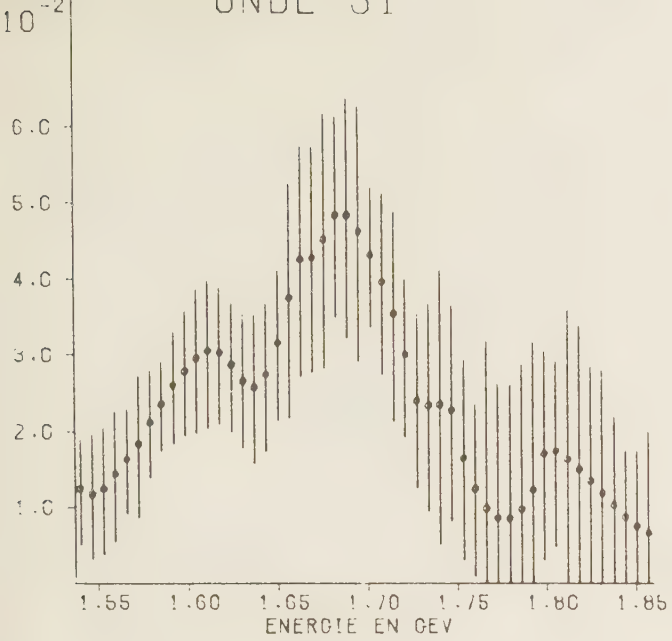
2 - Quatre trajectoires.

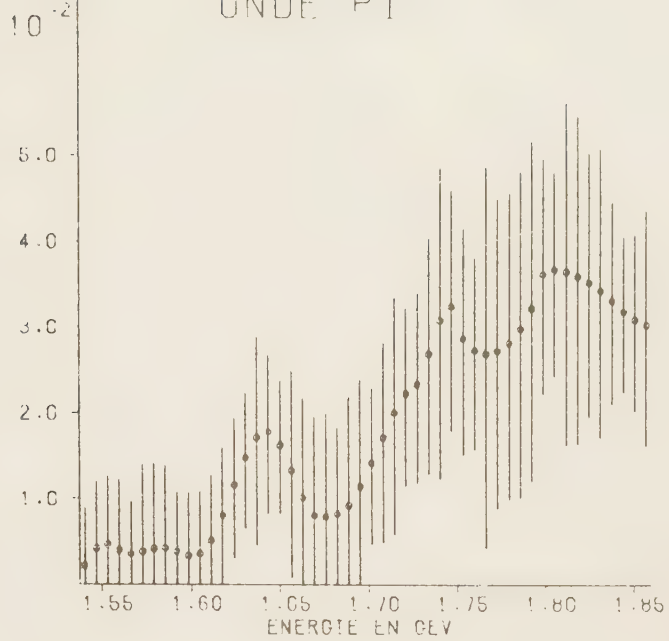
a - Entre 1540 et 1860 MeV nous avons généré 100 points équidistants (tous les 3 MeV), et nous avons reconstruit quatre trajectoires de zéros lissés (Fig. 14).

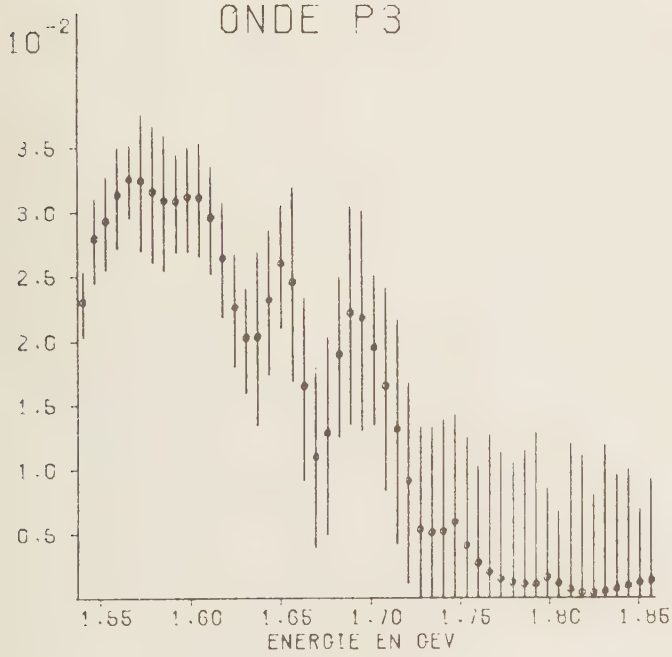
Nous constatons une grande similitude entre ces trajectoires et celles, expérimentales résultantes du choix I discuté dans le paragraphe précédent. Les quatre trajectoires a, b, c, d sont cette fois nettement séparées les unes des autres, ce qui revient à dire que les deux quadrilatéres générateurs d'ambiguïtés présents dans les trajectoires expérimentales ont disparus.

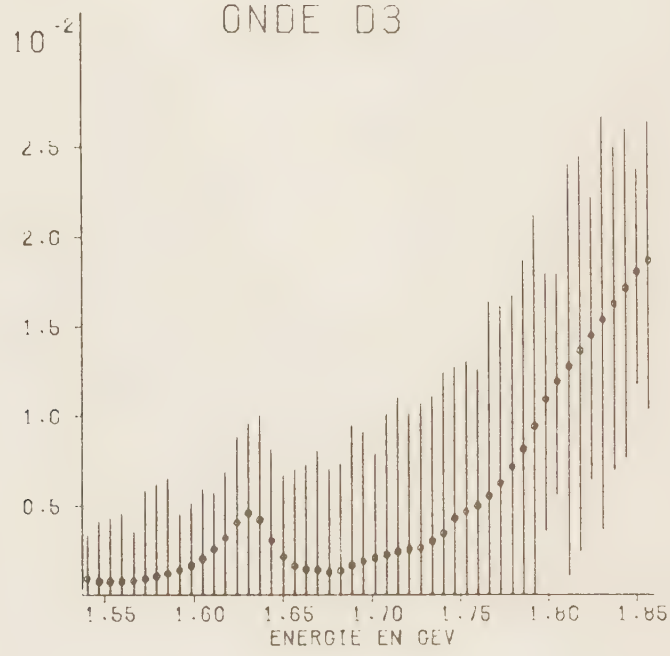
Avant de procéder à la reconstruction des amplitudes d'ondes partielles, nous ferons quelques remarques concernant les trajectoires lissées et leur comportement.

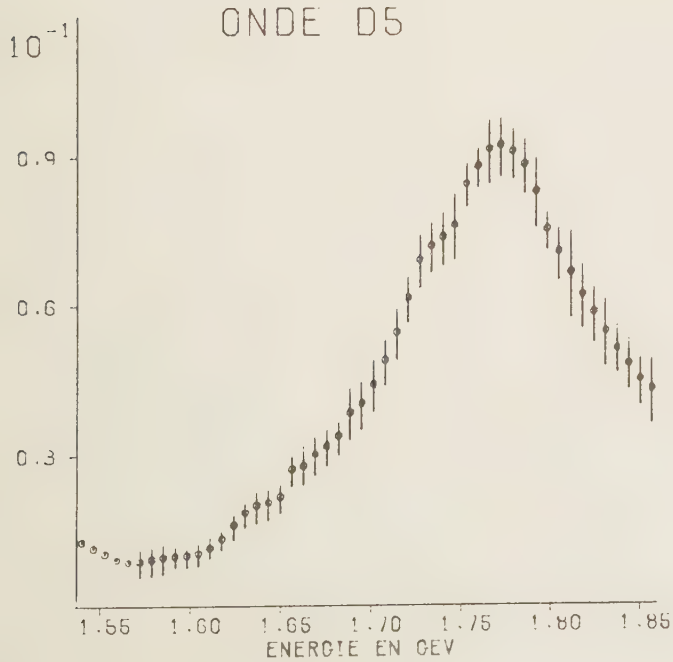
Entre les points marqués D_1, D_2 (Fig. 14) les zéros lissés sont strictement sur le cercle unité et par conséquent correspondent à des zéros réels dans le plan cosθ ce qui entraine une violation de la positivité à laquelle nous avons remédié en remplaçant deux zéros sur le cercle par un zéro, moyenne arithmétique des deux précédents, et son conjugué. L'arc de cercle $D_1\ D_2$ représente 15 MeV en énergie (espace moyen entre 2 points expérimentaux) et, nous admettrons dans un tel cas que la trajectoire demande à traverser la circonférence. Nous observons aussi en A une variation brusque de la tangente à la trajectoire que nous associerons à l'apparition d'une nouvelle trajectoire.

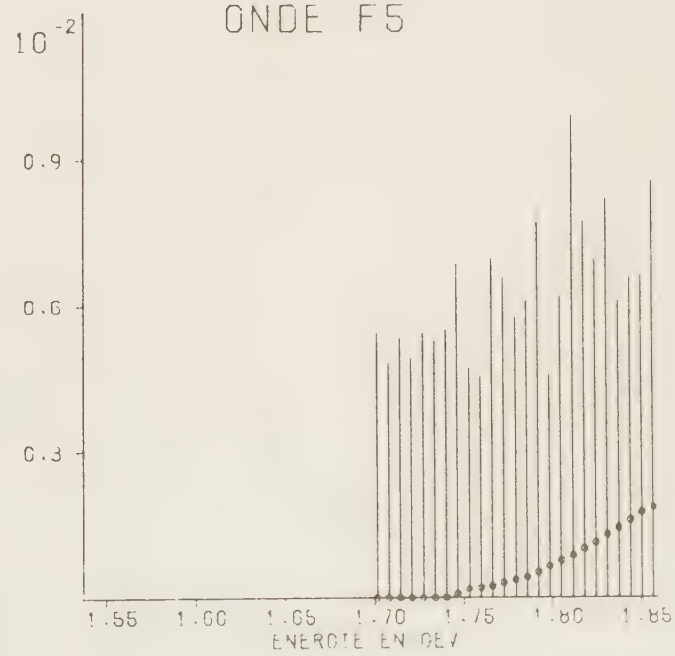

ONDE S1
10^-2
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

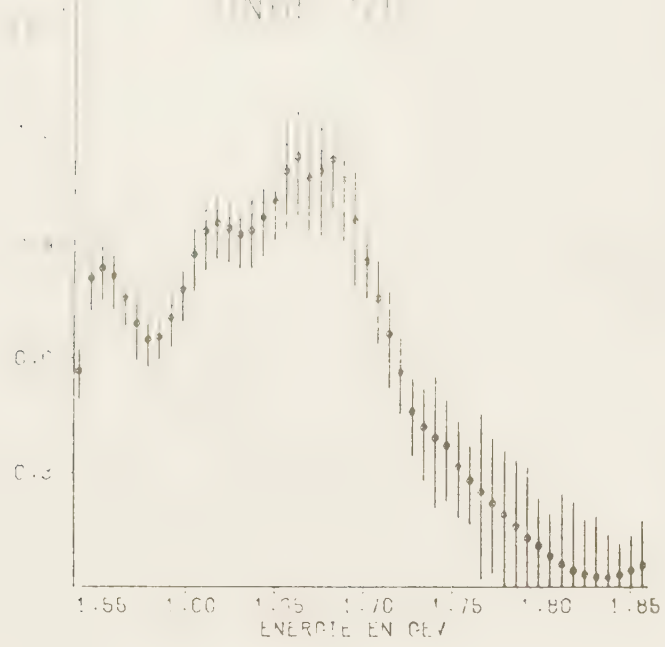

ONDE P1
10^-2
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

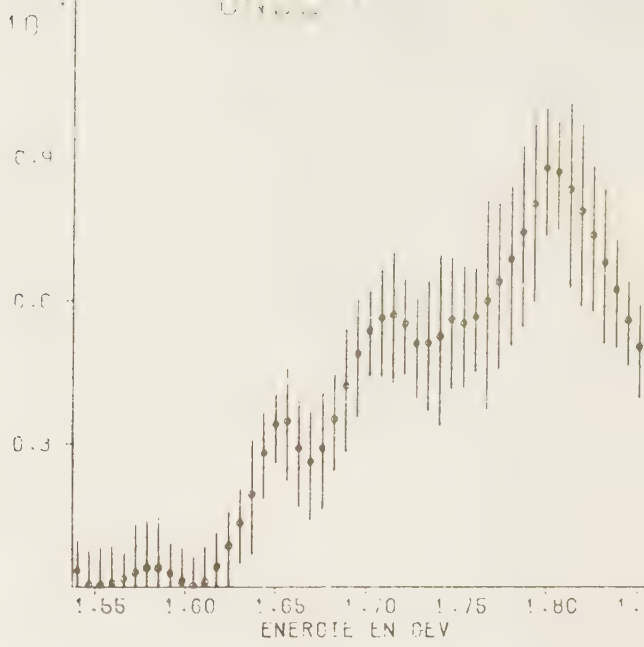

ONDE P3
10^-2
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

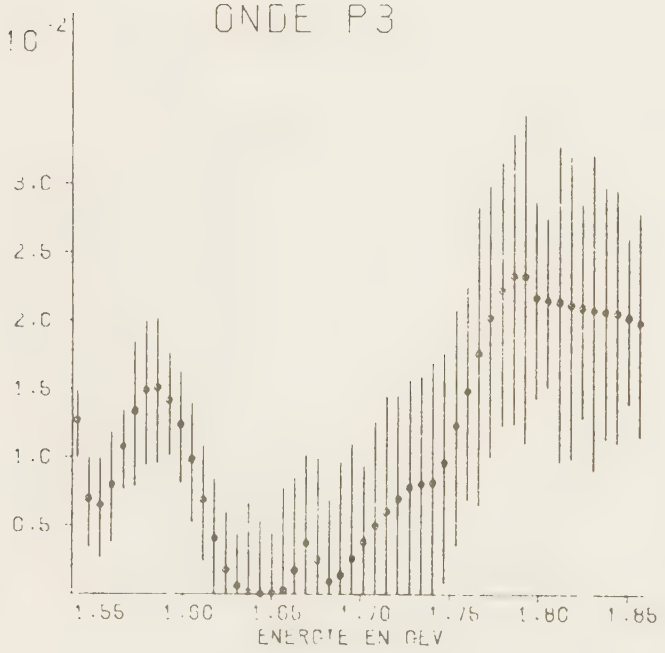

ONDE D3
10^-2
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

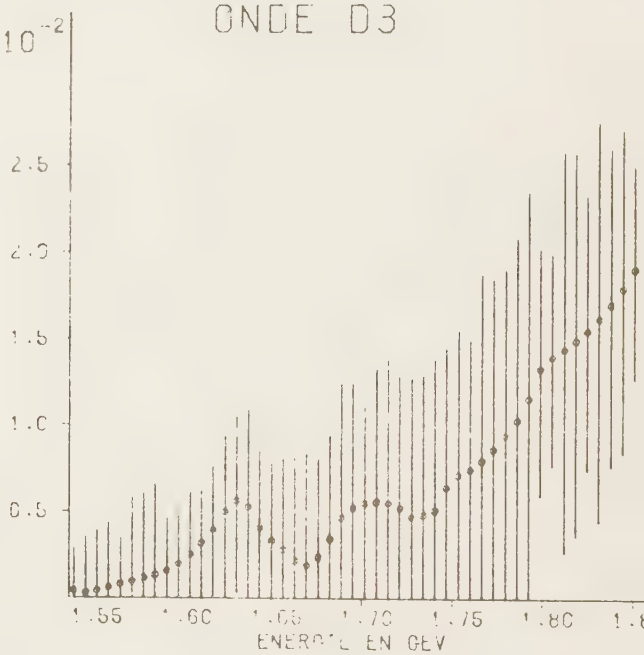

ONDE D5
10^-1
0.9
0.6
0.3
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

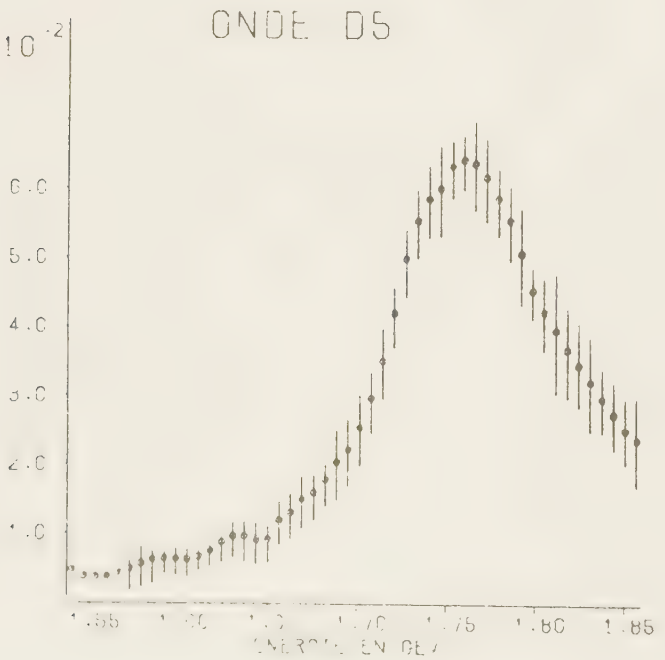

ONDE F5
10^-2
0.9
0.6
0.3
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

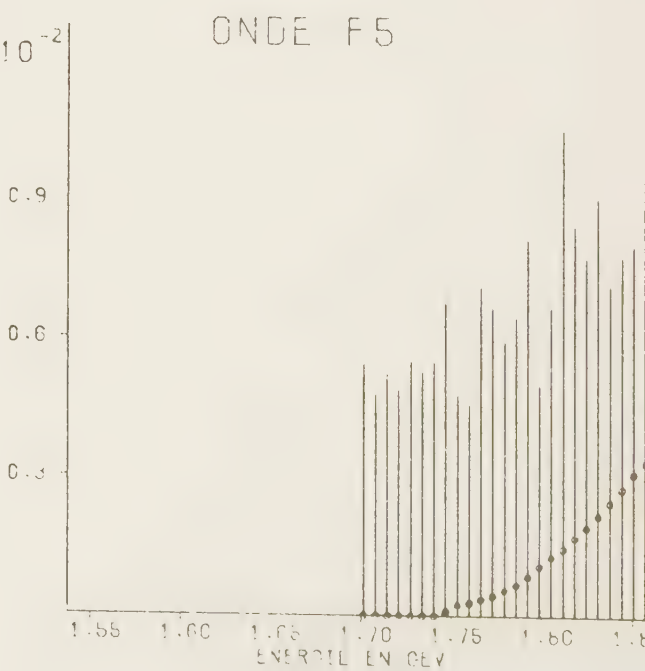

ENERGIE EN GEV

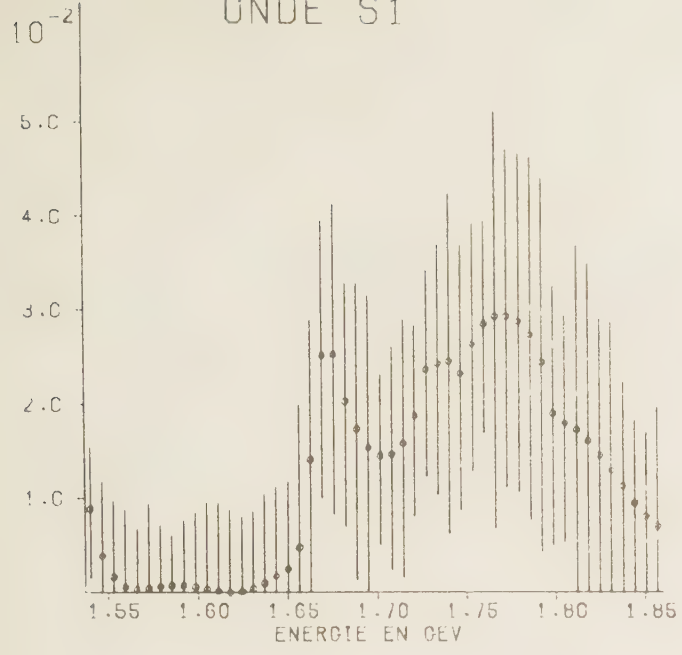

ENERGIE EN GEV

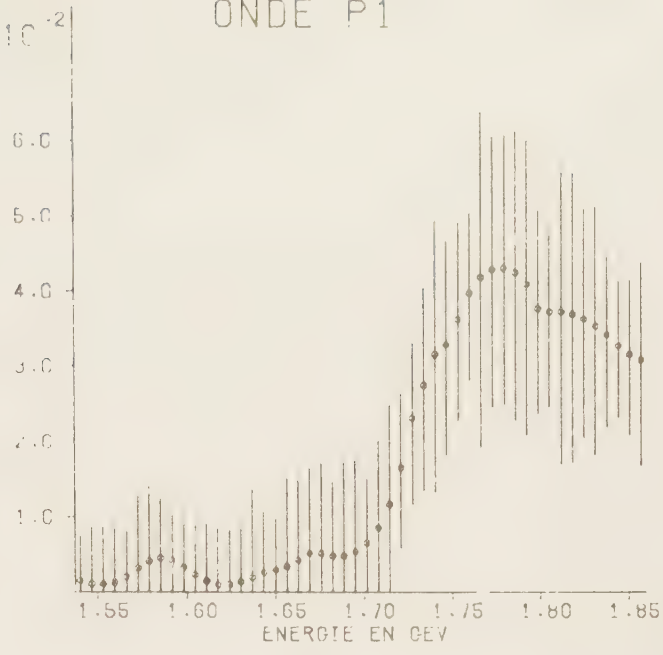

ONDE P3
ENERGIE EN GEV

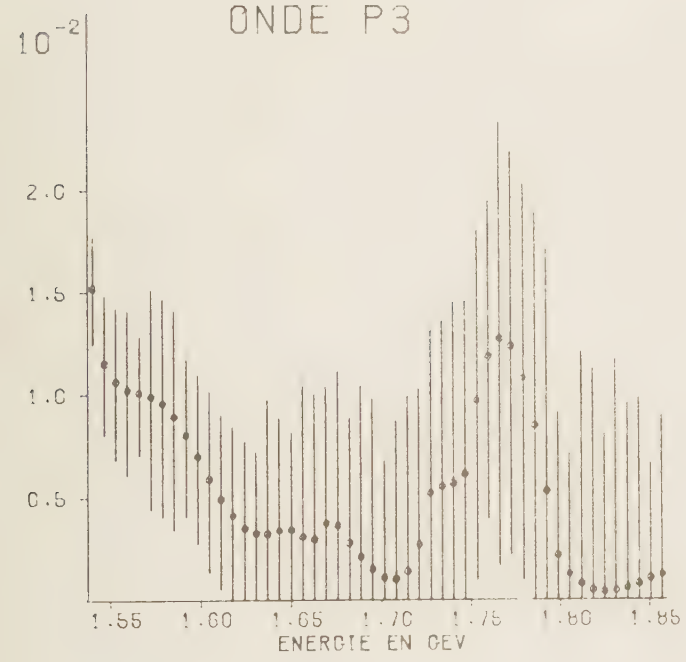

ONDE D3
ENERGIE EN GEV

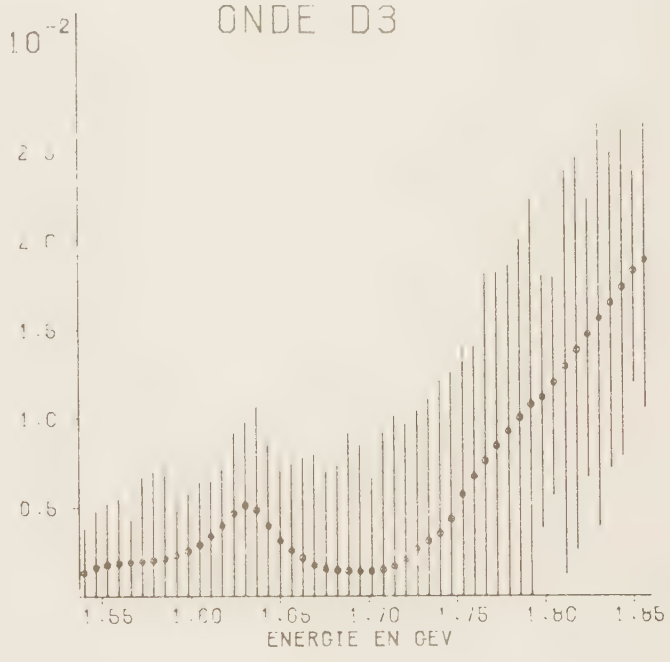

ONDE D5

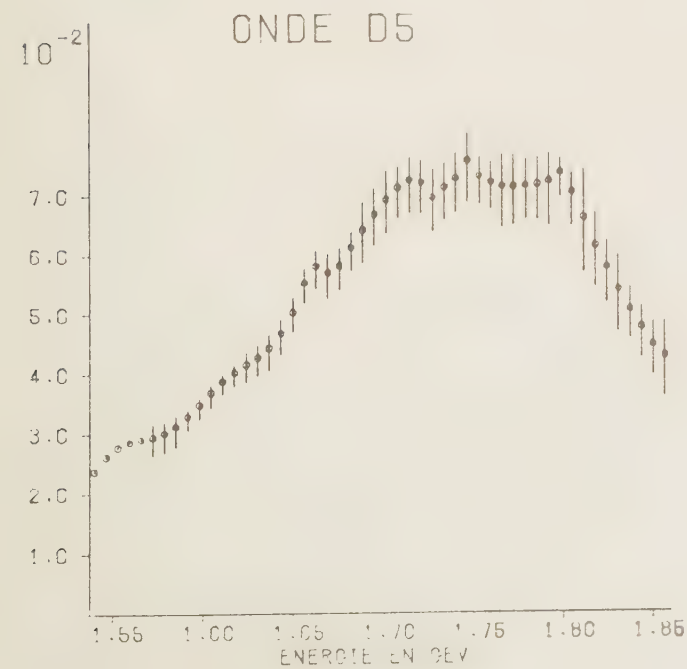

ONDE F5
ENERGIE EN GEV

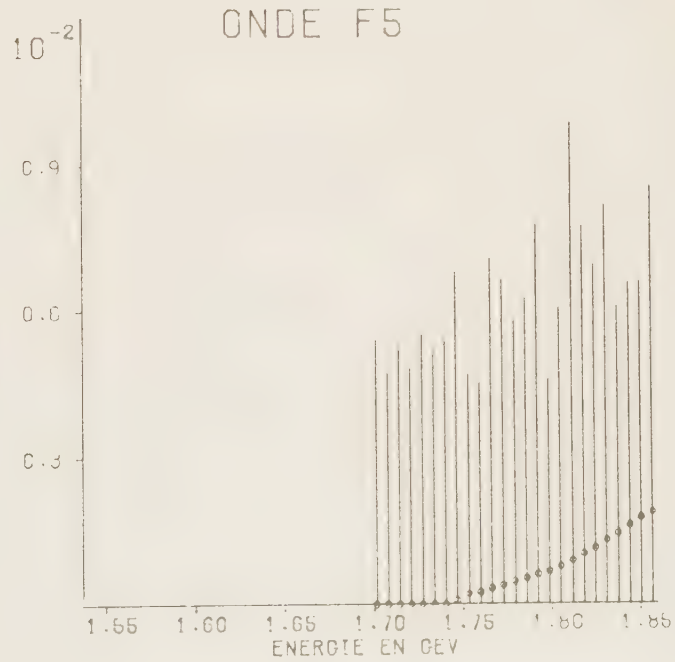

ONDE S1
10^{-2}
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV


ONDE P1
10^{-2}
6.0
5.0
4.0
1.0
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV


ONDE P3
10^{-2}
2.0
1.5
1.0
0.5
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV


ONDE D3
10^{-2}
1.5
1.0
0.5
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV


ONDE D5
10^{-2}
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV


ONDE F5
10^{-2}
0.9
0.6
0.3
1.55 1.60 1.65 1.70 1.75 1.80 1.85
ENERGIE EN GEV

Muni de ces quatre trajectoires nous avons pu reconstruire un ensemble de 16 solutions (2^4), mais nous pouvons tout de suite examiner les solutions choisies lors de l'étude des trajectoires expérimentales :

- la combinaison a, b, c, d_t fournit une onde D_5 dont le module carré est acceptable au delà de 1700 MeV (Fig. 16-b).

- la combinaison a, b, c, d_t présente un module carré pour l'onde D_5 nettement discontinu. Nous abandonnons cette possibilité (Fig. 16-

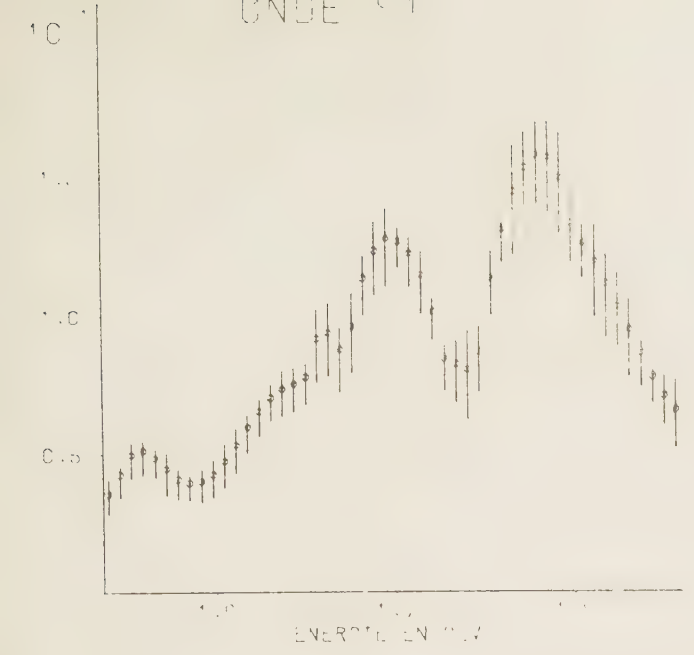
- enfin la solution, qui consiste à ne prendre que la trajectoire d extérieure, confère à l'onde D_5 un comportement résonnant (Fig. 16 compatible avec les résultats connus (valeurs estimées à l'oeil : M_R = 1770 MeV, Γ_R = 110 MeV, $\sqrt{xx^*}$ = .3).

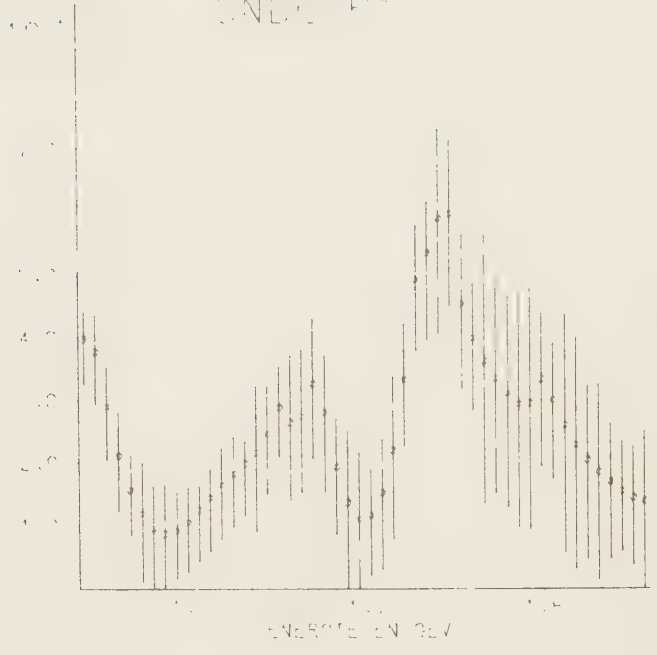
b - Avant d'entamer une étude plus quantitative d'au moins deux de ces solutions, nous discuterons un aspect délicat de notre technique lié à la continuité des amplitudes où, si l'on préfère, à l'introduction d'un nouveau zéro.

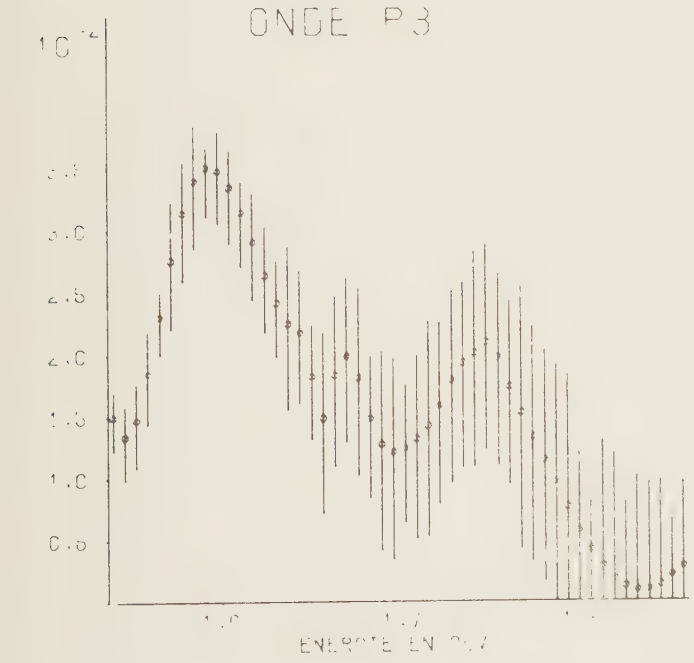
Comparons sur les figures 12 et 14 les trois trajectoires et les quatre trajectoires lissées. Si dans les deux cas la trajectoire a est identique, des différences sont sensibles pour les autres trajectoires entre 1600 et 1650 MeV :

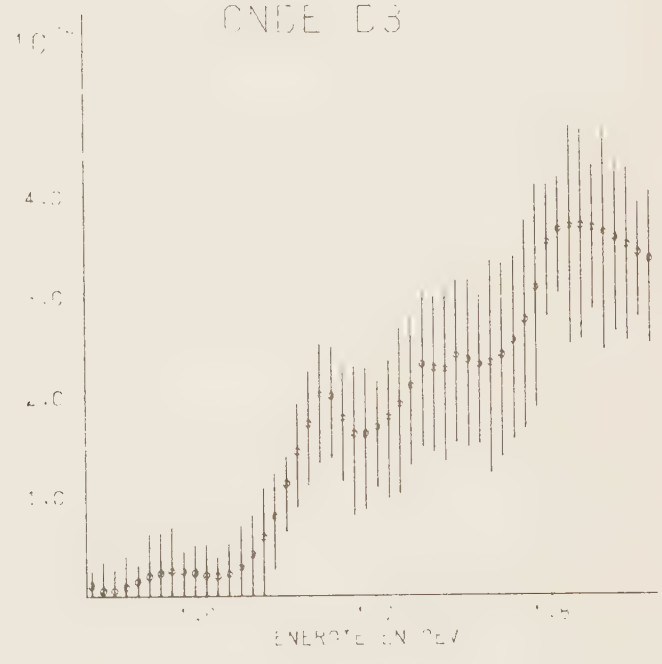
- en effet la trajectoire d (Fig. 14) s'éloigne de la région physique puis vient se substituer à la trajectoire c (Fig. 12).

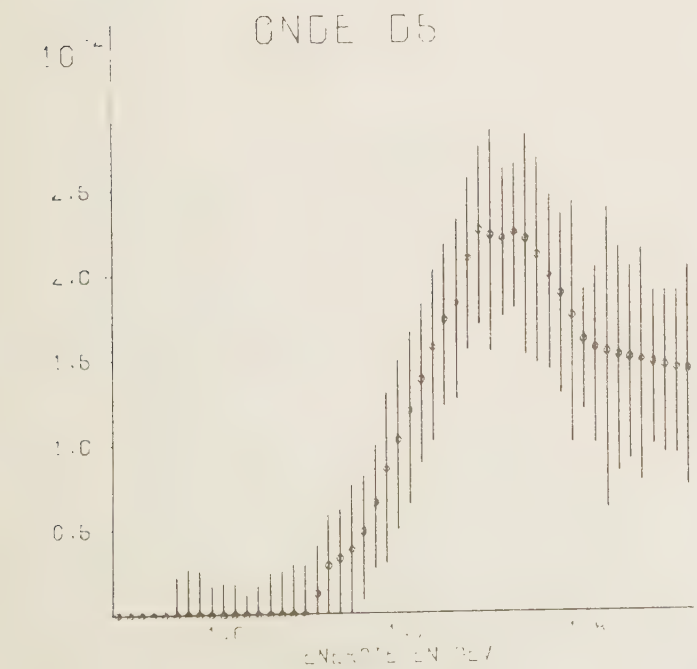
- la trajectoire c, elle, stagne à l'endroit précis du point de rebroussement remarqué dans la configuration à 3 zéros (Fig. 12). Cette comparaison nous conduit à introduire le quatrième zéro vers 1650 MeV (Fig. 15). Compte tenu des résultats déjà obtenus ce nouveau dessin des trajectoires a le mérite de présenter l'apparition de la trajectoire d de manière convaincante.











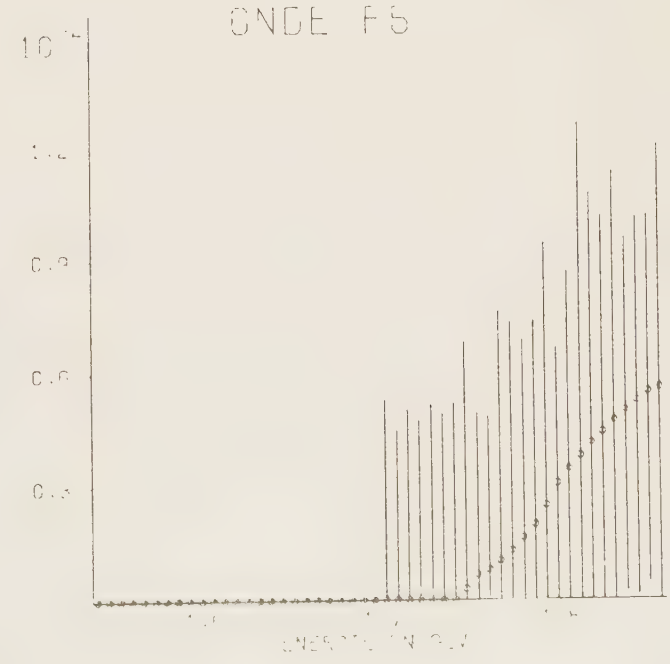


Fig 47

Nous reconstruisons alors les solutions équivalentes à celles déjà trouvées avec quatre trajectoires.

A priori une telle solution,si elle doit être compatible avec la solution lissée à trois zéros,ne l'est pas obligatoirement avec celle obtenue à partir des quatre trajectoires lissées depuis 1540 MeV.

Les modules carrés des amplitudes d'ondes partielles reconstruits de cette manière sont continus, mais dans l'onde D_5 le maximum situé vers 1765 MeV indique un couplage ($\sqrt{xx'} \sim .15$) nettement inférieur à celui attendu (Fig. 17).

Le soin apporté au dessin des trajectoires de zéros nous conduit donc à envisager la possibilité d'une troisième solution que nous nommerons solution basse.

Résumé de la situation.

La recherche des solutions compatibles avec les résultats connus doit nous conduire tout naturellement à une analyse quantitative. Mais, parce que la méthode que nous venons d'utiliser n'est pas encore familière, nous en rappelerons les faits essentiels et nous ferons quelques remarques avant d'entreprendre l'étude des modules et des phases des ondes partielles présentes en dessous de 1860 MeV.

La comparaison entre les 4 trajectoires expérimentales et les 4 trajectoires résultantes d'un lissage indique un accord satisfaisant ; l'hypothèse, a priori, contraignante du lissage n'altère pas la réalité expérimentale et peut être considérée comme un moyen de reproduire la variation des zéros en fonction de l'énergie.

Néanmoins deux problèmes ont été soulevés :

a) La représentation d'une résonance dans l'onde D_3 vers 1660 MeV.

b) L'apparition du quatrième zéro.

Ces deux questions sont très vraisemblablement liées. En effet, si l'on se reporte aux configurations de trajectoires (Fig. 14, 15) la position des zéros à partir de 1660 MeV semble bien définie, en revanche de 1540 à 1660 MeV nous assistons, aussi bien expérimentalement que d'après le lissage, à des modifications sensibles dans les comportements des trajectoires c et d notamment. Cette situation éliminant d'emblée toute possibilité d'étiquetage chronologique des trajectoires nous a obligé à tenir compte des résultats acquis pour notre choix définitif, c'est ainsi que l'existence du $\Sigma(1765)$ nous impose un choix de continuité vers les énergies inférieures à 1660 MeV en contradiction semble-t-il avec un état résonnant $\Sigma(1660)$ dans l'onde D_3.

Il convient alors de faire les remarques suivantes :

Aucune configuration expérimentale ne nous a permis de reproduire un comportement clairement résonnant pour le module de l'onde D_3 à 1660 MeV. La seule manière d'obtenir un module compatible avec le $\Sigma(1660)$ étant de ne considérer que trois trajectoires encore que la solution que nous avons retenu est criticable du fait des erreurs expérimentales.

Dans le paragraphe suivant nous examinerons néanmoins les deux groupes de solutions possibles à 4 trajectoires lissées avec un fort D_5 et à 3 puis 4 trajectoires avec un D_5 plus faible, mais a priori plus compatible avec un D_3 (1660).

D) Module et phase des amplitudes en dessous de 1860 MeV.

L'étude précédente des trajectoires de zéros nous a conduit à retenir deux choix de quatre trajectoire a, b, c, $\bar{d}_t$ d'une part et $\bar{a}$, b, c, $\bar{d}_t$ d'autre part. Les configurations analogues comportant trois trajectoires suivies d'une quatrième à 1650 MeV reste cependant possible, et nous en examinerons les conséquences.

- La variation en fonction de l'énergie des modules carrés des amplitudes pour les ondes S_1, P_1, P_3, D_3, D_5 (F_5) est représentée sur les figures 16 pour les deux solutions que nous envisageons.

- Solution 1 (a intérieure) :

L'onde S_1 présente une amplitude importante entre 1640 et 1730 Dans l'onde P_1 nous ne trouvons pas de structure de forte amplitude. L'onde P_3 indique un fond important ($\sim$ 15 %) sur lequel se superpose deux structures entre 1660 MeV et 1730 MeV, et le module de l'onde D_5 atteint son maximum ($\sim$ .3) pour 1770 MeV. Seule l'onde D_3 est trop faible ($\sim 10^{-4}$) pour donner une indication digne d'intérêt tout du moins sur la variation de son module.

- Solution 2 (a extérieure) :

Dans cette configuration l'onde P_1 comporte deux structures nettes, l'une à 1670 MeV, l'autre vers 1700 MeV et l'onde P_3 présente une bosse vers 1580 MeV.

L'onde S_1 se superpose à un fond qui semble important mais pourrait résonner entre 1600 et 1700 MeV.

Sachant que l'onde D_5 résonne vers 1765 MeV, nous pourrons étudier le comportement des ondes S_1, P_1, P_3 et D3 dans le plan complexe (Re $T_{j\ell}$, Im $T_{j\ell}$). Rappelons tout d'abord les propriétés d'une résonance à une énergie E_R donnée :

α) La phase ϕ de l'amplitude passe par la valeur 0° ou 90° à l'énergie $E = E_R$.

β) Le module $|T_{j\ell}|$ est maximum pour $E = E_R$.

γ) Les parties réelles et imaginaires de l'amplitude $T_{j\ell}$ sont respectivement nulles et maximales à l'énergie de la résonance.

δ) $\left|\frac{dT}{dE}\right| = \frac{t}{\varepsilon^2 + 1}$ est maximum pour $E = E_R$.

Dans le cas particulier d'une onde résonnante nous avons vu (II) que l'amplitude était bien décrite au voisinage de l'énergie de la résonance par une forme de Breit-Wigner :

$$T_R = \frac{+}{} \frac{t}{\varepsilon - i} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{E_R - E}{\Gamma/2} \quad \text{et} \quad t = \sqrt{xx'}$$

à condition qu'il n'y ait pas de fond.

La représentation en diagrammes d'Argand fréquemment utilisée permet de visualiser les variations des amplitudes dans le plan complexe par la trajectoire de l'extrémité du vecteur $T_{j\ell}$ (Fig. 18), le cercle centré à l'origine de rayon 1/2 fixe, dans le cas d'une réaction inélastique, la limite d'unitarité partielle ; autrement dit une onde purement résonnante ne peut avoir un couplage $\sqrt{xx'}$ excédant 0.5.

Pour étudier le comportement des ondes S_1, P_1, P_3, D_3 nous avons fixé la phase de D_5 en supposant que l'onde D_5 purement résonnante était bien décrite par une Breit-Wigner dont nous avons ajusté les paramètres.

Cet ajustement effectué sur le module carré de la solution du lissage, donne :

$$E_R = 1766 \text{ MeV} \qquad \sqrt{xx'} = ,28 \qquad \Gamma_R = 110 \text{ MeV}$$

S1

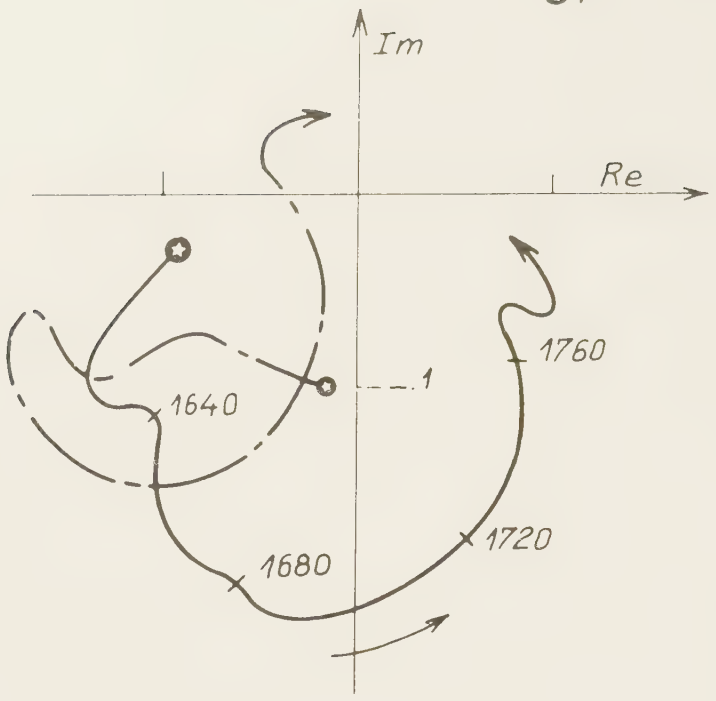


Fig. 18

D5

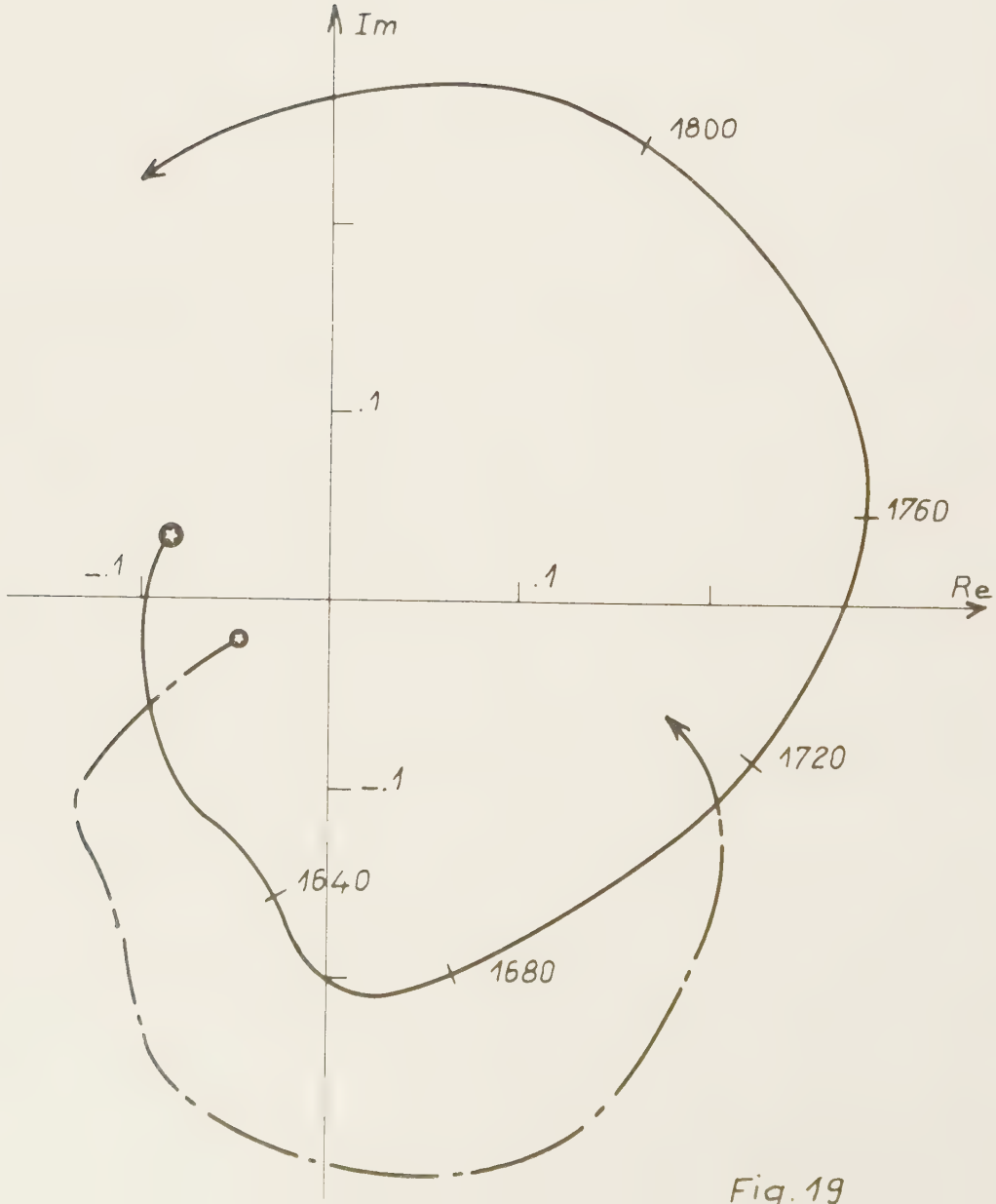


Fig. 19

En accord avec la convention de Levi-Setti (réf. 19) nous avons fixé un couplage négatif. Ce qui revient à prendre une phase $\phi = \pi$.

Tant que le module de l'amplitude correspondante à l'onde D_5 est faible, c'est-à-dire jusque vers 1640 MeV, la phase reste mal définie pour les autres ondes, mais au-delà de 1640 MeV nous pouvons examiner les diagrammes d'Argand (Fig. 19) nous constatons alors un comportement résonnant pour l'onde S_1,

Les ondes P_1 et P_3 semblent avoir une variation compliquée qu'il est difficile d'attribuer à un comportement résonnant. En revanche l'onde D_3 présente une boucle typique d'une onde purement résonnante, mais nous avons vu que la variation de son module ne permettait pas vraiment de détecter une résonance dans cette onde.

Si des résonances existent dans les ondes S_1, P_1, P_3 et D_3 nous venons, en fixant la phase de D_5 et son signe, d'en déduire les phases. Le comportement résonnant le plus net étant celui de l'onde S_1, nous pouvons alors essayer de fixer sa phase et regarder le comportement de l'onde D_5. Compte tenu d'un fond non résonnant linéaire nous avons ajusté les paramètres de S_1 sur son module : E_R = 1680 MeV $|\sqrt{xx'}|$ = ,2, Γ_R = 100 MeV. Le diagramme d'Argand (Fig. 19) pour l'onde D_5 présente le comportement caractéristiques de la résonance $\Sigma(1765)$ tourné d'une phase $\pi + \varepsilon$.

Nous avons essayé plusieurs masses raisonables, pour la résonance suggérée dans l'onde S_1, entre 1650 et 1700 MeV de façon à chercher un comportement pour D_5 en accord avec les conventions de Lévi-Setti. Finalement nous avons conclu en tournant toutes les ondes d'une phase globale $\varepsilon \lesssim 10°$ de manière à maintenir une phase de 180° pour l'onde D_5.

Nous avons adopté la même stratégie pour la solution 2. Le comportement des ondes D_5 et D_3 est comparable à celui observé dans la solution 1. L'onde P_1 présente une variation de phase rapide autour de 1670 MeV qui pourrait être interprétée comme une résonance étroite et la bosse vue dans l'onde P_3 correspond à une partie réelle importante. L'onde S_1, avec cette fois un fond plus important, peut représenter une résonance aux environs de 1700 MeV dont il est difficile d'estimer les paramètres.

L'apparition du quatrième zéro à 1650 MeV (Fig. 15) nous conduit à envisager deux solutions possibles, l'une avec les trajectoires a et d venant de l'extérieur du cercle unité, l'autre avec les trajectoires a, c et d venant de l'extérieur. Pour ces deux configurations nous avons effectué une analyse identique à la précédente. La phase globale fixée par l'onde D_5 résonnante à 1765 MeV, nous avons examiné le comportement des ondes de moment angulaire total $J < 5/2$. Mais dans ce cas, même si l'amplitude correspondante à l'onde S_1 présente encore les caractéristiques d'une amplitude résonnante, nous n'avons pu, cette fois, en fixant la phase entre 1540 et 1700 MeV à l'aide de cette même onde retrouver une onde D_5 compatible avec les résultats connus, ni même obtenir des comportements continus pour les autres ondes. Toutefois nous retiendrons que la configuration a, $\bar{c}$, $\bar{d}$, b présente une amplitude résonnante pour un état de spin parité $3/2^-$.

En définitive :

En calculant 4 trajectoires de zéros depuis 1.540 MeV nous avons trouvé 2 configurations engendrant des solutions compatibles avec la résonance $\Sigma(1765)$ dans l'onde D_5.

- La première a b c $\bar{d}_t$ nous a permis de détecter une résonance dans l'onde S_1 de masse 1680 MeV, de largeur 100 MeV avec un couplage $\sqrt{xx'} = -.2$.

- La seconde $\bar{a}$ b c $\bar{d}_t$ ne permet pas une interprétation aisée des ondes S_1, P_1 qui maintiendrait le comportement de D5 résonnant.

Pour ces raisons c'est la première configuration qui nous servira de guide dans l'étude des trajectoires au-delà de 1850 MeV.

Si nous introduisons la quatrième trajectoire de zéro à 1650 MeV comme les données expérimentales semblaient nous le suggérer, deux solutions sont à nouveau possible mais le couplage du D_5 (1765) au canal $\Lambda\,\pi^\circ$ ($|\sqrt{xx'}| \sim ,15$) est alors inférieur de moitié à la valeur généralement admise (réf. 6).

III - DE 1850 MeV A 2450 MeV.

Dans cette gamme d'énergie nous possédons des données issues d'expériences réalisées en collaboration avec le Collège de France, ce qui nous a permis d'appliquer une méthode de maximum de vraisemblance, précédemment décrite, pour estimer les zéros de l'amplitude totale et les coefficients A_ℓ, B_ℓ.

Nous avons suivi la même chronologie dans les étapes pour l'exploration de cette zône : trajectoires expérimentales, choix d'une solution, trajectoires lissées. Cependant pour les trajectoires expérimentales nous n'avons utilisé que 20 points entre 1915 et 2450 MeV provenant de nos expériences et nous discuterons à ce propos les résultats de la méthode de maximum de vraisemblance.

A - Trajectoires expérimentales.

Dans un premier temps nous avons cherché à déterminer l'ordre de notre pseudo-polynôme d'approximation de l'amplitude, ce qui revient à déterminer le nombre de zéros nécessaire pour reproduire correctement les données.

Qualitativement le comportement des coefficients A_ℓ, B_ℓ publiés (Fig. 4) nous indique que ce nombre de zéros doit être compris entre 6 et 8. Nous avons alors ajusté nos distributions angulaires $(1 \pm P) \frac{d\sigma}{d\Omega}$ en utilisant successivement 6, 7, 8 zéros, la figure 7 montre pour 20 énergies le résultat de l'ajustement à 6 zéros, sur chaque dessin nous pouvons clairement relier la position d'un zéro proche à la présence d'un creux dans les distributions. Si nous accroissons le nombre de zéros, les zéros supplémentaires ainsi introduits ne sont pas stables, leur effet étant relié à de petites structures dans les distributions ils sont éloignés de la région physique voire même situés hors de la zone de convergence des approximants, en d'autres termes, lorsque l'énergie augmente, les structures des distributions angulaires

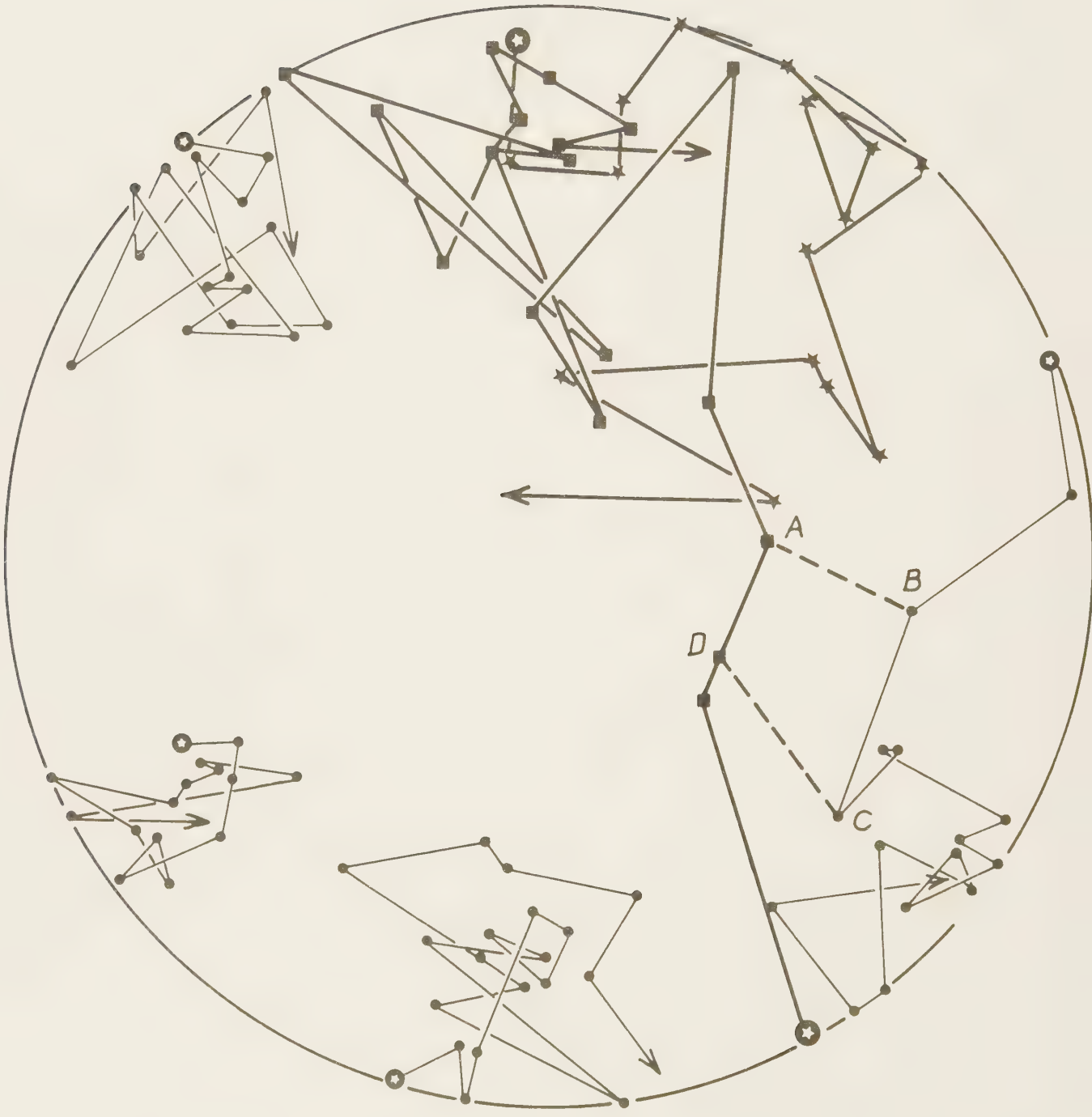


Fig. 20

deviennent périphériques et les zéros que nous introduisons sont lointains et distribués aléatoirement. Nous avons finalement décidé provisoirement de ne garder que 6 zéros de 1900 à 2100 MeV. Sur la figure 20 nous présentons les 6 zéros expérimentaux à chaque énergie, le lien entre les zéros d'une énergie à la suivante est effectué comme dans le paragraphe précédent. Si l'on se reporte à la configuration à 4 zéros, il est facile de se convaincre que les trajectoires a, b, c, d sont bien le prolongement des trajectoires de même nom décrites entre 1540 et 1850 MeV. Les deux trajectoires e et f correspondraient donc aux deux nouveaux zéros nécessaires dans cette gamme d'énergie.

Pour les trajectoires proches du cercle unité bien individualisés, il est difficile de dire si elles doivent ou non traverser la circonférence, seul les résultats du lissage pourront nous renseigner sur ces points. En revanche les trajectoires qui sont plus lointaines sont moins bien localisées et nous devons résoudre une ambiguïté, du même type que celle rencontrée dans la configuration à 4 trajectoires, figurée par le quadrilatère ABCD.

B - Choix d'une solution.

Six trajectoires nous le savons vont nous permettre de reconstruire les modules carrés des amplitudes d'ondes partielles de S1 à F7, il suffira ensuite d'examiner parmi les 64 solutions possibles celles que nous retiendrons avant le lisser les trajectoires.

Comme dans la tranche d'énergie comprise entre 1540 et 1850 MeV où l'onde D5 résonnait avec certitude à 1765 MeV, nous ferons ici l'hypothèse de l'existence d'une résonance dans l'onde F7 à la masse 2030 MeV avec un couplage $\sqrt{xx'} \sim ,20$.

a - Un examen des 64 solutions (Fig. 21) pour la configuration initiale où la trajectoire d suit le chemin $\overline{AD}$, nous conduit à en retenir quatre. Suivant la convention que nous avons adoptée ces quatre configurations correspondent aux combinaisons de trajectoires suivantes notées :

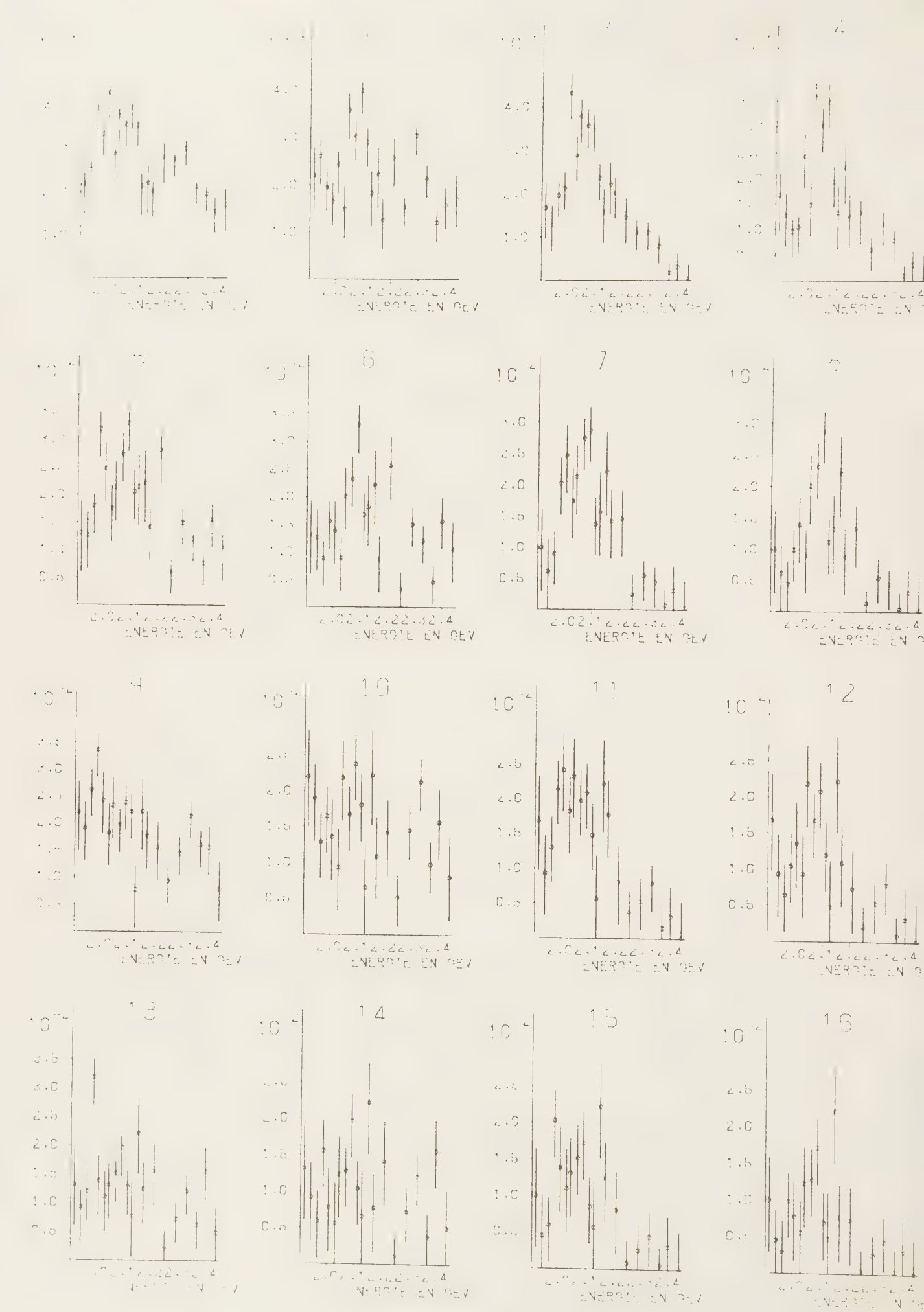


Fig. 21a

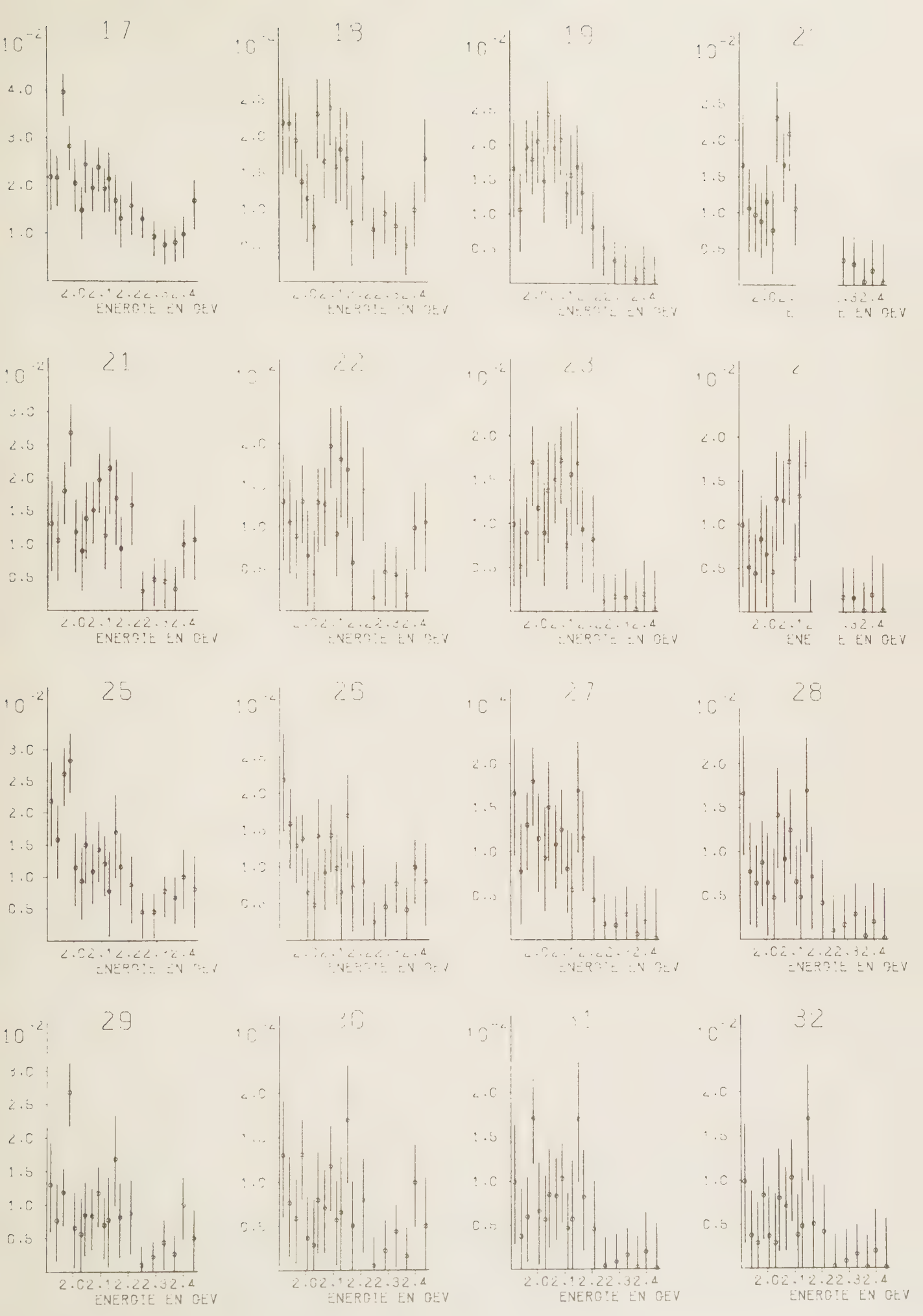


Fig. 21b

Fig. 21c

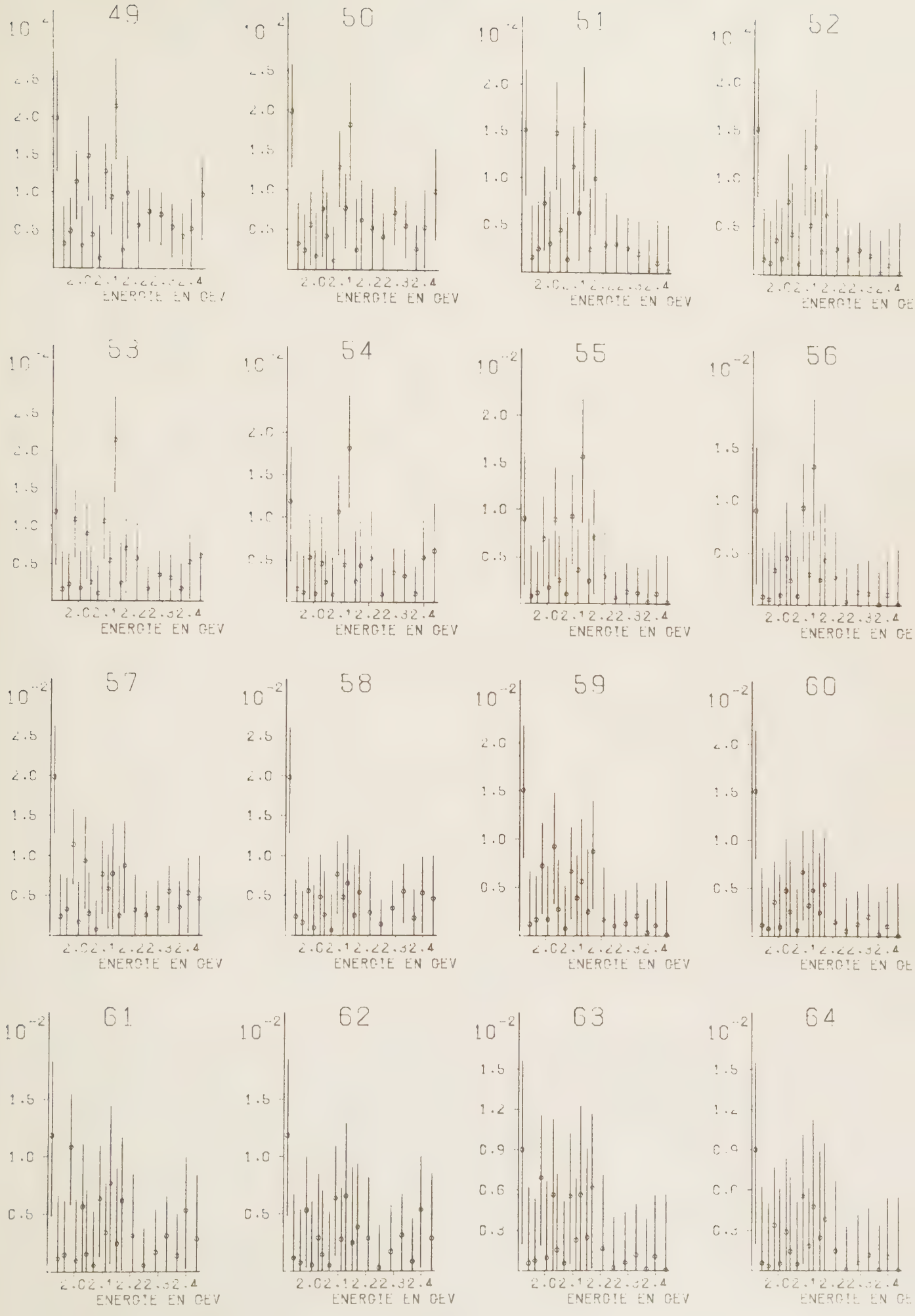


Fig. 21d

1 -	a b c d e f	(1)
3 -	a b c d e $\overline{f}$	(3)
4 -	a b c $\overline{d}$ e $\overline{f}$	(4)
7 -	a b c d $\overline{e}$ $\overline{f}$	(7)

Seule la solution 1 conserve toutes les trajectoires intérieures au cercle unité ce qui, suivant nos critères de continuité, ne paraît pas être satisfaisant. Nous éliminons sans beaucoup de difficultés cette solution dans la mesure où elle présente pour l'onde F7 un module carré dont l'amplitude a une allure compliquée et peu vraisemblable pour une résonance. En revanche les solutions 3, 4, 7 sont acceptables, ce qui conduit à penser que la trajectoire f doit être extérieure au cercle unité et, par suite, considérée comme la sixième trajectoire.

b - Si maintenant nous considérons la continuité $\overline{AB}$ pour la trajectoire d, de la même manière nous pouvons construire 64 solutions ambiguës. A nouveau notre choix se porte sur 4 solutions dont 3 sont identiques aux précédentes du point de vue de la configuration globale des trajectoires. En effet, dans les solutions 1, 3 et 7 les trajectoires a et d sont intérieures au cercle, le trajet qu'elles suivent en réalité n'a donc aucune influence sur la reconstruction des amplitudes. Seule la solution 4 comporte cette fois la trajectoire a extérieure au lieu de la trajectoire d, mais pour les énergies inférieures à 1860 MeV nous avons décidé de conserver comme solution canonique celle qui gardait la trajectoire a intérieure, et puisque nous n'avons pas mis en évidence de traversée du cercle pour cette trajectoire, nous laisserons de côté cette dernière solution pour des raisons évidentes de continuité.

En fin de compte les deux configurations initiales n'apportent pas de changement appréciable dans la détermination des amplitudes, nous adopterons donc la configuration que nous imposera le lissage lorsque nous générerons suffisamment de points intermédiaires.

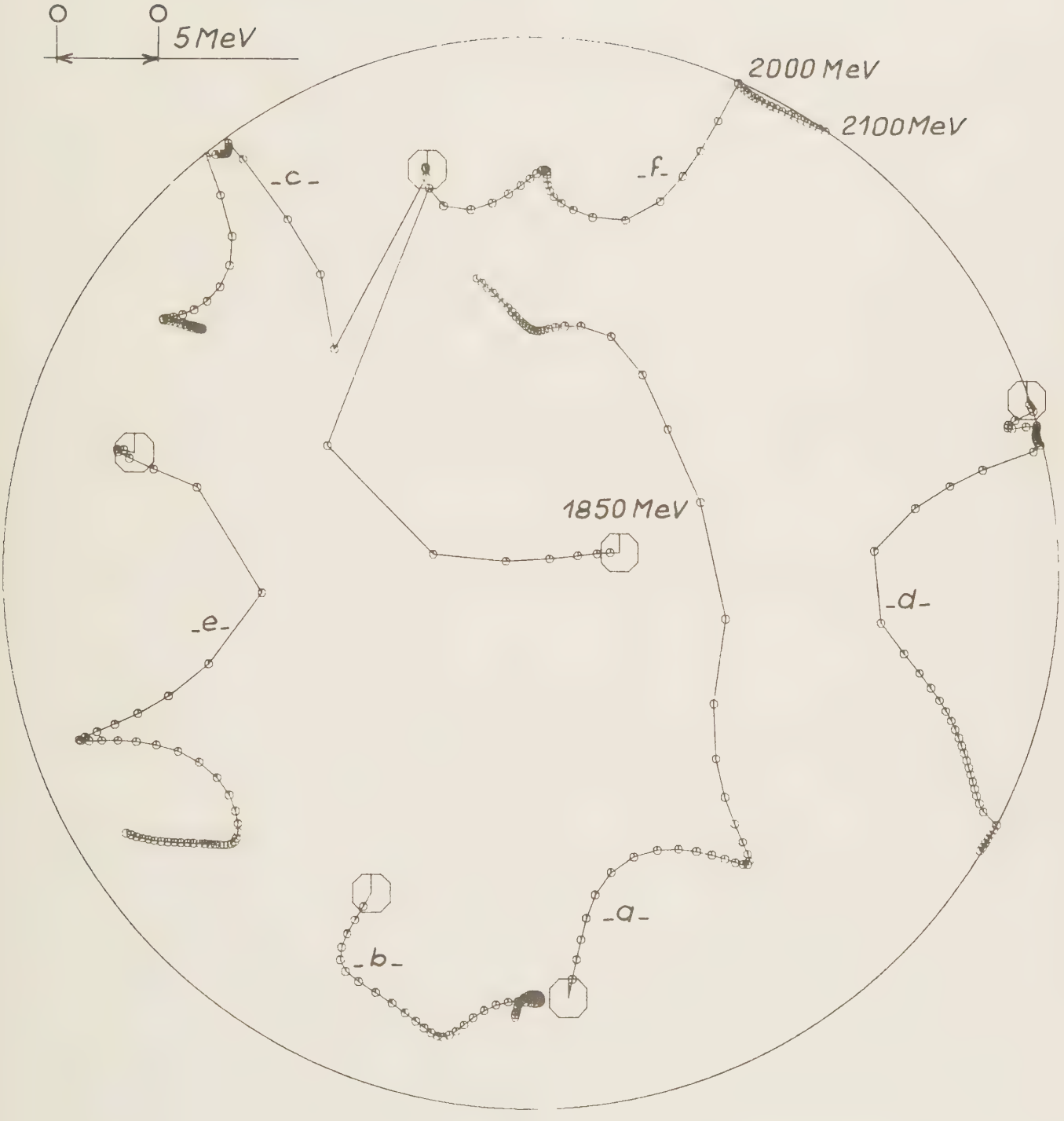


Fig. 22

C - Trajectoires lissées.

L'étude précédente réalisée avec les zéros bruts nous a permis d'une part, de mettre en évidence 3 configurations possibles compatibles avec une onde F7 résonnante et, d'autre part, de voir se dessiner deux nouvelles trajectoires baptisées e et f.

Ces deux dernières trajectoires sont déjà très proches de la région physique aux énergies où nous possédons la meilleure information expérimentale [1915 - 2150 MeV] , la réalisation d'un lien continu avec les trajectoires présentes en-dessous de 1860 MeV exige donc que nous utilisions les coefficients A_ℓ, B_ℓ lissés.

L'allure des coefficients expérimentaux et la visualisation de la courbe continue obtenue après lissage (Fig. 4) nous conduit à introduire des ondes de spin 7/2 aux alentours de 1860 MeV.

Nous avons donc calculé 6 zéros à chaque énergie à partir de 1860 MeV ; le résultat de ce calcul (Fig. 22) est ensuite comparé aux trajectoires expérimentales :

- La trajectoire f est la seule à venir du centre du cercle elle correspond par conséquent à l'apparition des coefficients A_6 et B_6 et peut être considérée comme la 6e trajectoire.

- Les trajectoires a, b, c, d correspondent bien aux trajectoires expérimentales et si nous les comparons aux trajectoires de la zone d'énergie inférieure à 1860 MeV (Fig. 14) elles en sont bien le prolongement.

- La trajectoire e provient des coefficients A_5 et B_5.

- Les trajectoires a et d choisissent de traverser l'axe réel. Autrement dit le lissage impose à ces deux trajectoires la continuité $\widehat{CB}$, $\widehat{AD}$ (cf. Fig. 20).

Quant aux trajectoires de zéros notre but est atteint :

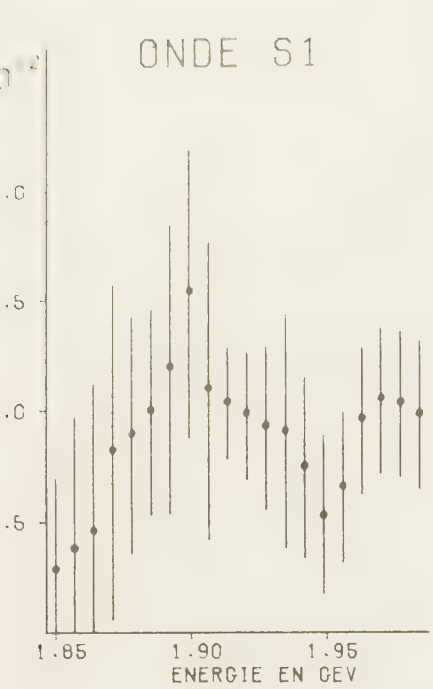
Elles sont bien déterminées depuis 1540 MeV en accord avec les données expérimentales.

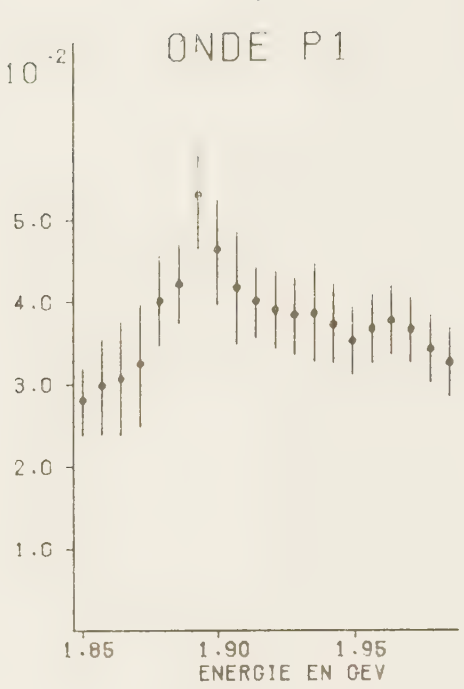
Nous savons les numéroter, c'est-à-dire que nous savons aux environs de quelle énergie elles pénétrent dans la zone de convergence de la série en puissance de W qui approche l'amplitude F(W).

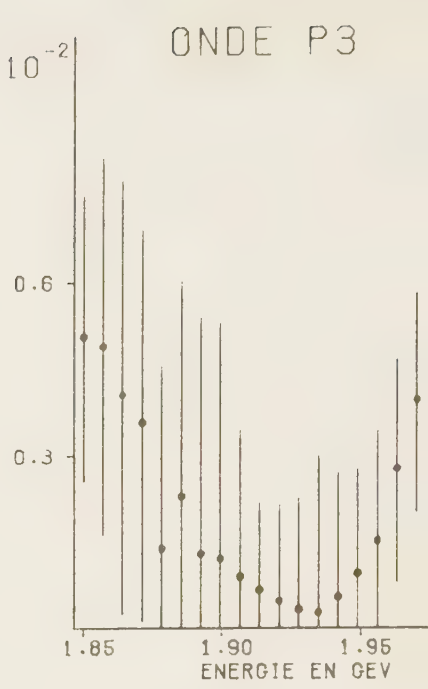
Si nous examinons maintenant les 3 configurations de zéros suggérées d'après l'étude précédente, deux seulement sont à conserver a b c d e $\bar{f}$ et a b c $\bar{d}$ e $\bar{f}$; en effet puisque la trajectoire e doit venir de l'origine, la configuration avec $\bar{e}$ ne pourrait correspondre qu'à une traversée de la trajectoire e, or si nous nous reportons à la figure 22 il est bien clair que la trajectoire e ne peut en aucun point traverser le cercle unité sans engendrer une discontinuité dans les amplitudes.

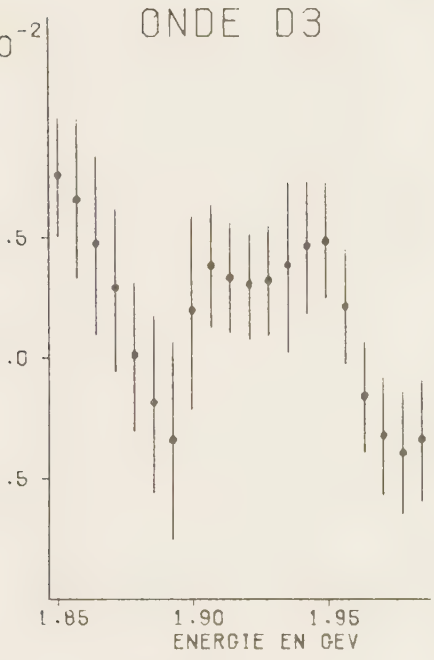
Trajectoires	Energie de départ	Ondes présentes
a, b, c, d,	1.540 MeV	S_1 à D_5
e	$\sim$ 1.730 MeV	S_1 à F_5
f	$\sim$ 1.860 MeV	S_1 à F_7

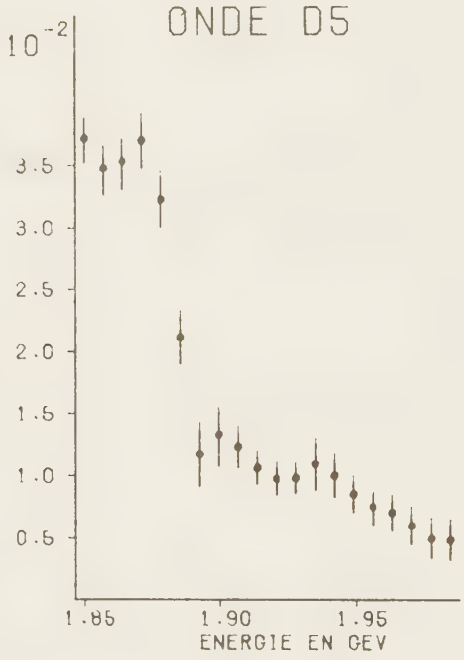
Deux résonances dominantes dans les ondes D_5 et F_7 nous ont permis de fixer des configurations de trajectoires compatibles entre elles de 1540 MeV à 1860 MeV d'une part, et de 1860 à 2000 MeV d'autre part. Nous allons chercher maintenant à effectuer une étude plus quantitative permettant de déterminer le comportement des autres ondes partielles.

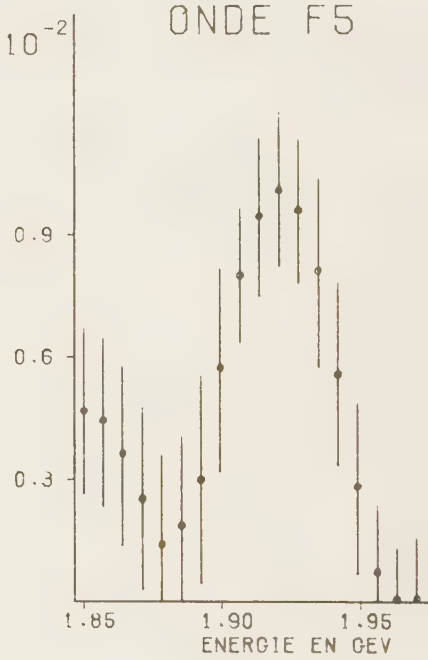

ONDE S1
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV


ONDE P1
10 -2
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV


ONDE P3
10 -2
0.6
0.3
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV


ONDE D3
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV


ONDE D5
10 -2
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV


ONDE F5
10 -2
0.9
0.6
0.3
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV

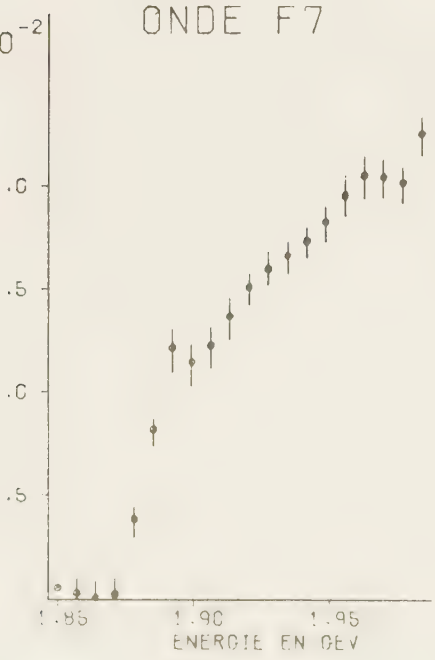

ONDE F7
1.85
1.90
1.95
ENERGIE EN GEV

Fig 23

D - Modules et phases des amplitudes.

Nous diviserons en deux parties ce paragraphe important. Dans une première partie nous étudierons le comportement des ondes partielles de S_1 à F_7 à l'aide des trajectoires lissées que nous venons d'introduire. Dans la seconde partie notre attention se portera sur l'introduction des ondes G, pour cela nous utiliserons aussi les trajectoires lissées mais nous n'en conserverons que les points correspondants à ceux des expériences C.R.S. et C.S.

1 - En-dessous de 2 GeV. De S_1 à F_7.

L'étude des trajectoires expérimentales et lissées nous a conduit à retenir deux configurations possibles a, b, c, d, e, $\bar{f}$ d'une part, a, b, c, $\bar{d}$, e, $\bar{f}$ d'autre part.

La première de ces configurations nous a permis de reconstruire les modules carrés des amplitudes d'ondes partielles de S_1 à F_7 (Fig. 23).

- L'onde S_1 est négligeable.
- L'onde P_1 présente un module de l'ordre de .2.
- L'onde P_3 est négligeable.
- L'onde D_3 est de faible amplitude (,07)

- L'onde D_5 présente la retombée du $\Sigma(1765)$.
- L'onde F_5 montre un module dont le maximum $\sim$,1 est situé à 1915 MeV
- Enfin le module de l'onde F_7 témoigne naturellement de la montée du $\Sigma(2030)$.

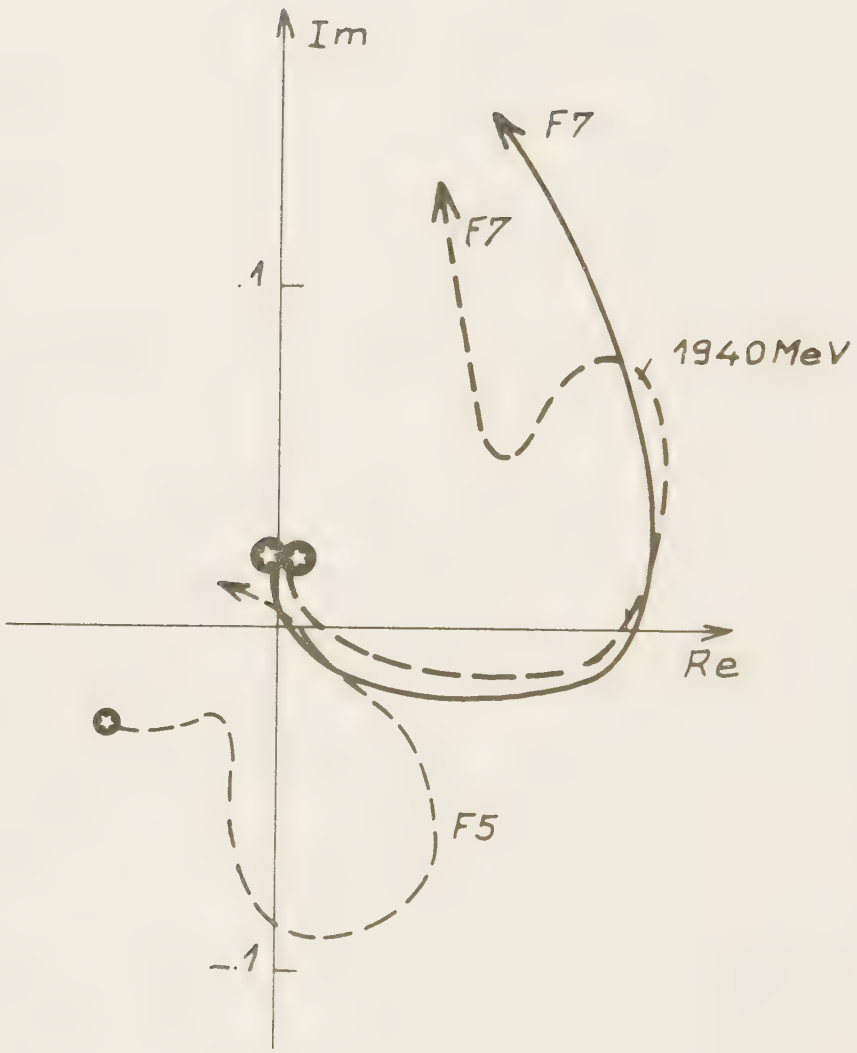


Fig.24

Procédant alors comme dans la zone d'énergie inférieure à 1860 MeV nous fixerons la phase à l'aide de l'onde F_7 considérée comme purement résonnante et paramétrée sous forme d'une Breit-Wigner, après avoir réalisé un ajustement sur le module obtenu à partir des trajectoires expérimentales.

$$t = ,20 \qquad E_R = 2,030 \text{ GeV} \qquad \Gamma_R = 160 \text{ MeV}$$

Les diagrammes d'Argand ainsi obtenus permettent de rendre compte d'une résonance dans l'onde F_5 (Fig. 24), la boucle dessinée dans le plan complexe de l'amplitude (Re T, Im T) confirmant l'allure résonnante suggérée par la variation du module en fonction de l'énergie. Aucune autre onde ne présente toutes les caractéristiques d'une résonance, par conséquent, nous avons en définitive ajusté les paramètres de l'onde F_5 sur son module t = ,09, E_R = 1916 MeV, Γ_R = 60 MeV, puis nous avons fixé la phase jusqu'à 1950 MeV à l'aide de $F_5(1915)$.

La phase ainsi imposée n'altère pas le comportement de l'onde F_7 entre 1900 et 1950, nous avons alors fixé la phase globale inconnue en imposant successivement la phase des deux amplitudes résonnantes F_5 et F_7 ce qui a préservé la continuité de la phase.

Avec la seconde solution retenue a, b, c, $\bar{d}$, e, $\bar{f}$ nous avons reconstruit les amplitudes d'ondes partielles, mais cette fois, le module de l'onde F_7 présente, outre la structure résonnante attendue à 2030 MeV, une bosse vers 1940 MeV d'amplitude trois fois moindre. Nous serons cependant très prudent quant à l'interprétation de ce phénomène.

Une telle bosse est inexistante lorsque l'on ne considère que les points expérimentaux de l'expérience C.R.S. et pour la même configuration les modules de S_1 et P_3 présentent des pics étroits douteux.

Sans autre hypothèse que l'existence d'une résonance $\Sigma(2030)$ dans l'onde F_7, nous avons donc trouvé deux possibilités, qui ont le mérite de prolonger la configuration choisie au-dessous de 1860 MeV qui maintenait le $\Sigma(1765)$ toutes les deux témoignant de la résonance étroite $\Sigma(1915)$ et l'une d'entre elles suggérant une deuxième résonance dans l'onde F_7.

2 - Problème de l'apparition des ondes G.

Si nous nous reportons maintenant aux coefficients expérimentaux A_ℓ, B_ℓ on constate qu'au delà de 2 GeV les coefficients d'ordre 7 et 8 ne sont pas nuls. Nous sommes alors confrontés au problème suivant : nous avons montré (cf. deuxième partie - Chap. II) que d'une part six zéros suffisaient pour ajuster correctement nos données expérimentales jusqu'à 2,45 GeV et que, d'autre part, des zéros supplémentaires seraient certainement instables autour de 2 GeV alors que la "nature" semble réclamer des ondes de moment angulaire $L > 3$. Nous reviendrons brièvement sur cette question dans notre dernière partie mais pour l'instant nous allons montrer comment, avec les moyens à notre disposition, non seulement l'introduction d'ondes de moment angulaire $L = 4$ n'altère pas les résultats précédents, mais encore nous renseigne sur le comportement des ondes jusqu'à 2,4 GeV en accord avec l'analyse dépendante de l'énergie classique dont nous avons présenté les résultats (cf. Chap. I).

a - Six trajectoires de zéros. Neuf amplitudes d'ondes partielles.

Dans le paragraphe précédent (cf. II,C) nous n'avons accordé aucune attention aux ondes partielles au-delà de 2,1 GeV, mais nous avons calculé les zéros expérimentaux et lissés jusqu'à 2,45 GeV.

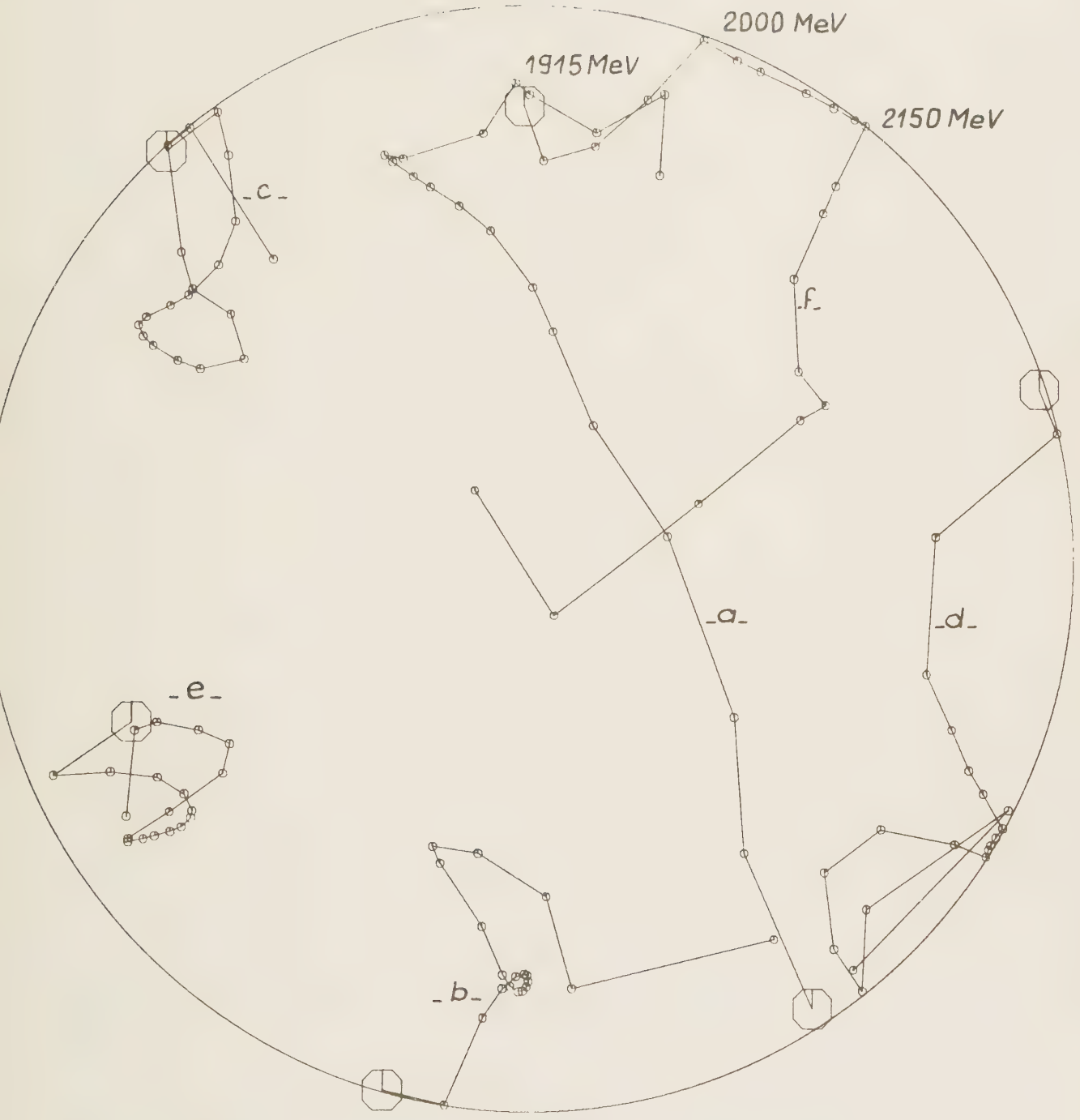


Fig. 25

Expérimentalement nous constatons que si les trajectoires b, c, d, e et f sont prés de la région physique (Fig. 25), en revanche la trajectoire a s'en éloigne entre 1920 et 2060 MeV. Une manière d'exploiter ce zéro instable est de prolonger continûment l'amplitude totale F(W) à l'aide de la relation simple (cf. Appendice B-2).

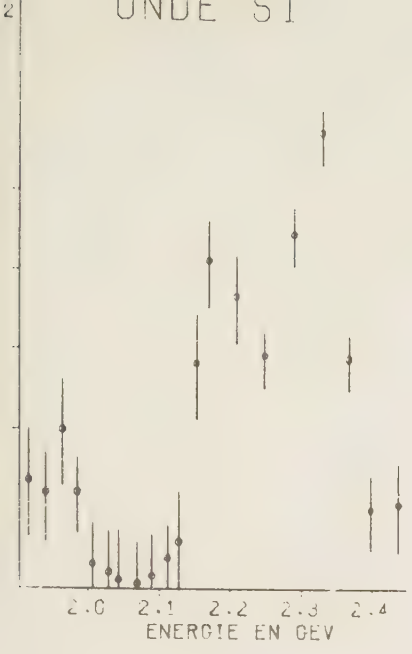
$$F^{(n+2)}_{J+1,L+1}(W_1,\ldots \hat{W}_K,\ldots W_n,0,0) \text{ prolonge } F^{(n)}_{J,L}(W_1,\ldots,W_n) \text{ si } W_K \to 0$$

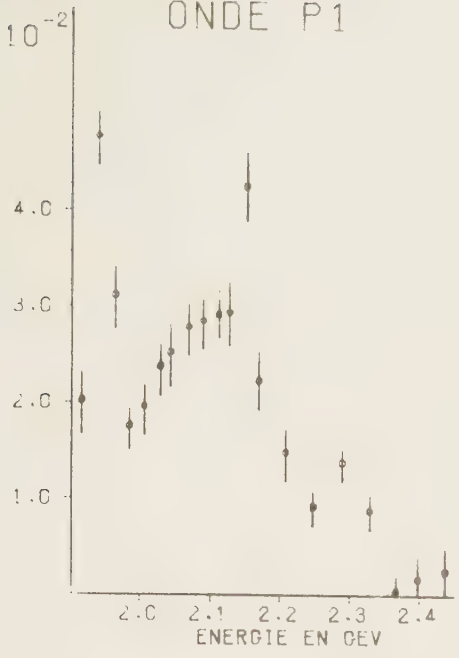
Autrement dit nous choisissons notre meilleure solution entre 1850 et 2100 MeV, puis nous la prolongeons au-delà sans calculer de zéros supplémentaires. Cette façon de procéder qui revient à dissymétriser les polynômes $R_{j\ell}(W)$ (cf. Appendice B-1) implique des relations de dépendance entre des amplitudes de spin donné qui ne nous permettent pas de trancher définitivement quant au spin et à la parité des résonances introduites ainsi s'il y en a.

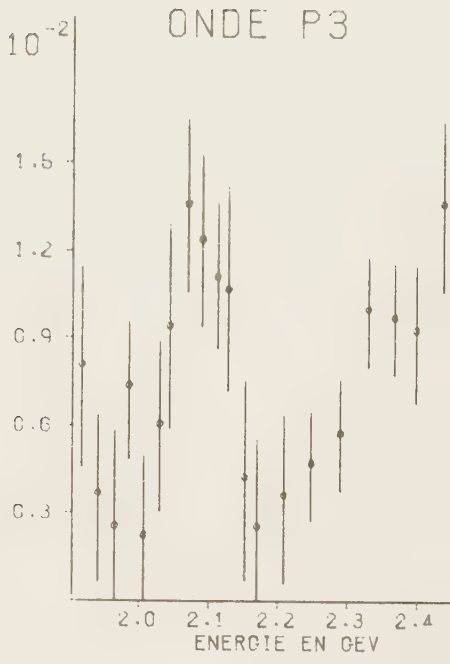
Nous avons ainsi prolongé la solution qui présentait une résonance $\Sigma(2030)$ dans l'onde F_7 entre 2 et 2,45 GeV de façon à garder un certain recouvrement avec la zone précédente. Dans le but de suivre une démarche comparable à celle suivie jusqu'à présent, nous avons effectué ce prolongement à l'aide des trajectoires expérimentales et lissées.

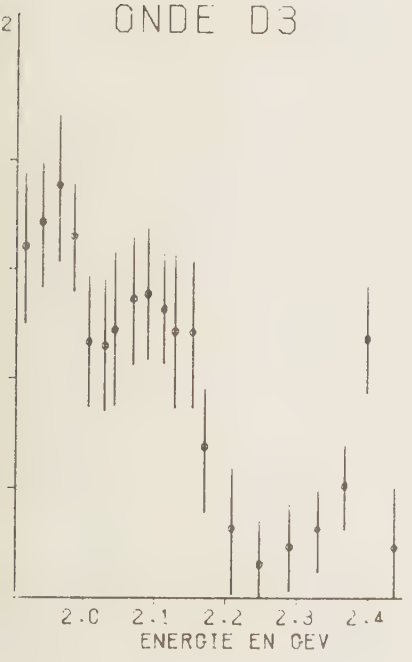
Cependant notre choix ici est imposé par la configuration de zéros aux énergies inférieures et, par conséquent, la reconstruction des amplitudes à l'aide des trajectoires expérimentales et lissées nous permettra uniquement de savoir si le lissage introduit ou non des structures inexistantes. Nous avons constaté que les structures mises en évidence à l'aide des trajectoires expérimentales n'étaient ni altérées ni déplacées par le lissage.

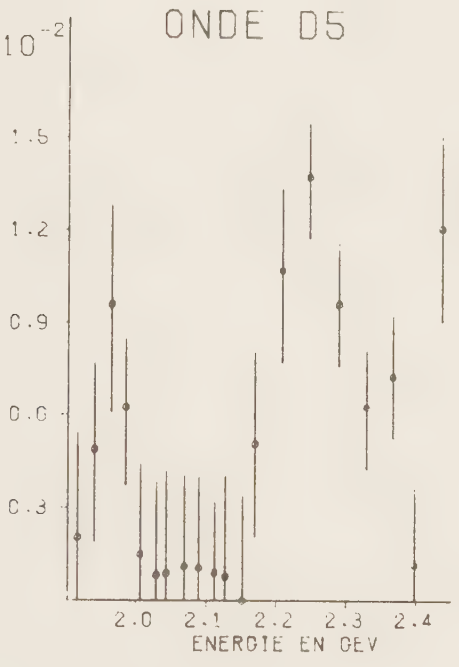
La figure 26 présente les modules carrés des amplitudes pour les ondes S_1, P_1, P_3, D_3, D_5, F_5, F_7, G_9, nous constatons alors essentiellement que F_7 n'est pas détériorée par la présence des ondes G_7 et G_9 et, en outre, il y a des indications pour les états résonnants de spin 3/2, 5/2 et 9/2 à des masses respectives voisines de 2080, 2260, 2200 MeV.

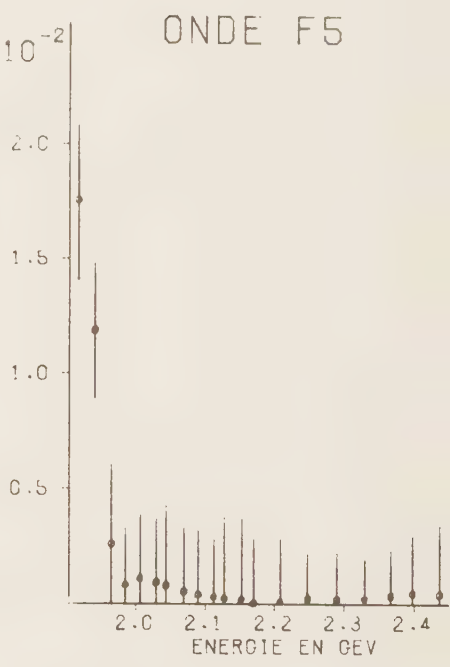

ONDE S1
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE P1
10^{-2}
4.0
3.0
2.0
1.0
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

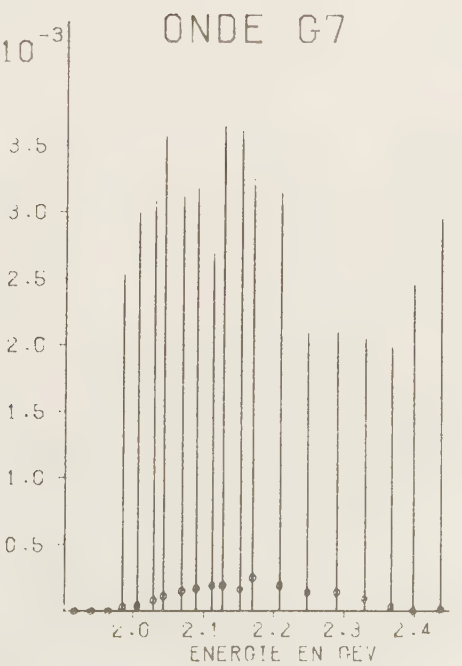

ONDE P3
10^{-2}
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

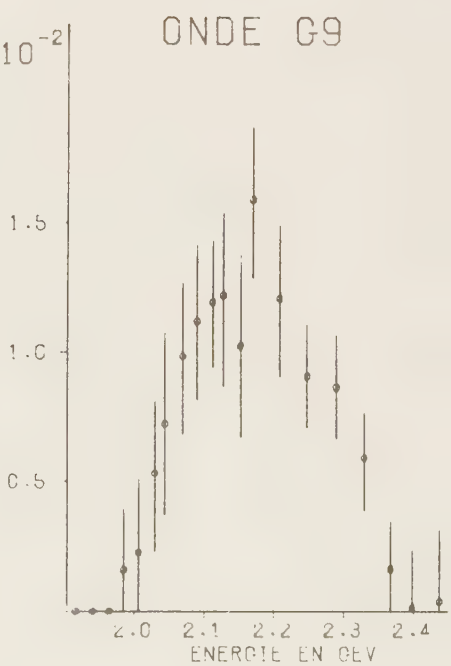

ONDE D3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE D5
10^{-2}
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE F5
10^{-2}
2.0
1.5
1.0
0.5
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

ONDE F7
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE G7
10^{-3}
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE G9
10^{-2}
1.5
1.0
0.5
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

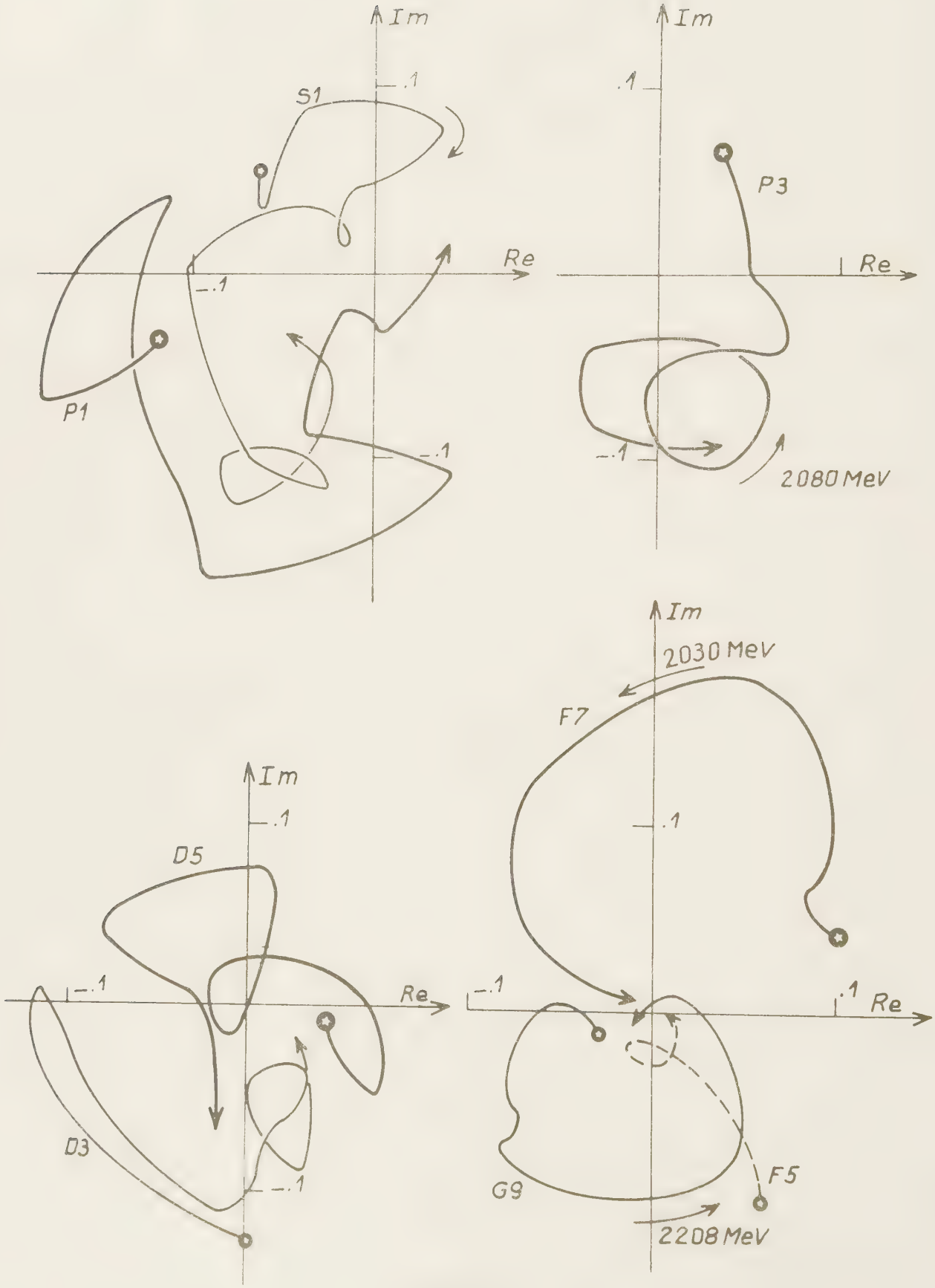

Im
.1
S1
Re
-.1
P1
-.1
Im
.1
P3
Re
-.1
2080 MeV
Im
2030 MeV
F7
.1
-.1
.1 Re
G9
F5
2208 MeV
Im
.1
D5
-.1
Re
D3
-.1

Fig. 27

Fig. 28

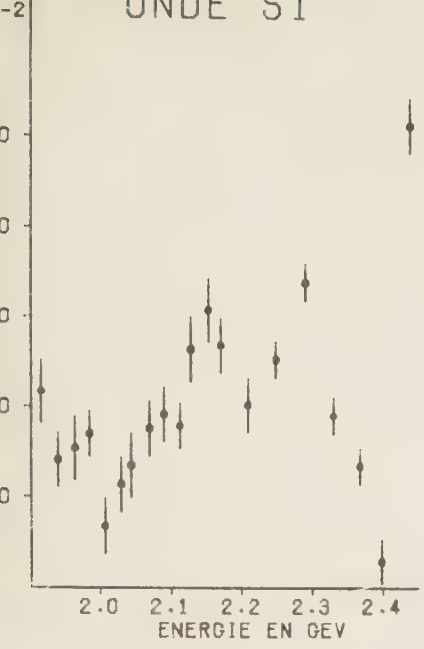
Par analogie avec ce que nous avons fait précédemment nous avons fixé la phase à l'aide du $\Sigma(2030)$. Les diagrammes d'Argand ainsi obtenus présentent des comportements résonnants caractéristiques pour G_9, P_3 et D_5, (Fig. 27). Encouragés par ce résultat positif nous avons ajusté les paramétres de G_9 en lui conférant une forme de Breit-Wigner pure : $t = -.1$, $E_R = 2200$, $\Gamma_R = 140$ MeV, puis au-delà de 2.1 GeV nous avons fixé la phase à l'aide de G_9.

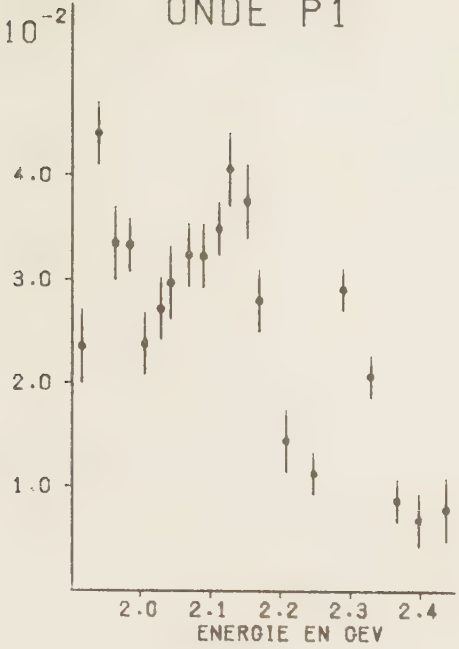
b - Huit trajectoires de zéros.

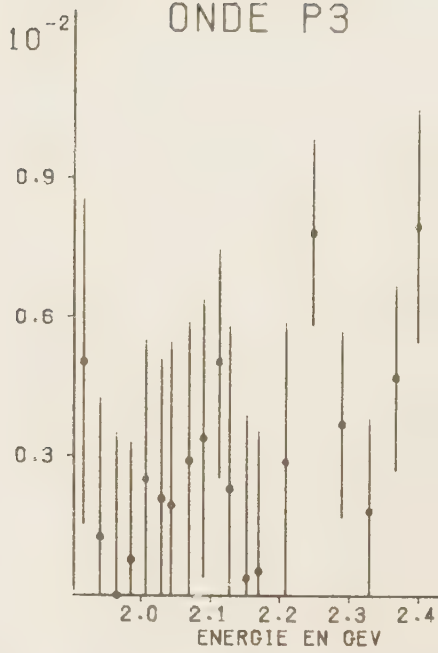
Si nous calculons huit trajectoires de zéros dans la même zone d'énergie la configuration des six trajectoires précédentes est à peine modifiée par la présence des deux nouvelles trajectoires lointaines.

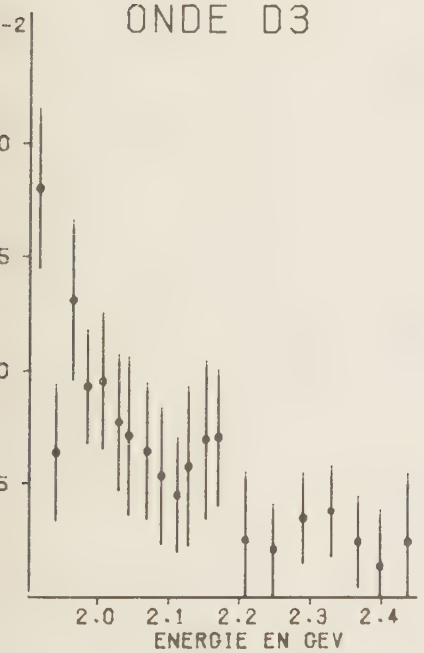
Nous avons alors cherché à reconstruire les amplitudes d'ondes partielles pour une solution compatible avec la solution à six zéros. Les trajectoires a, b, c, d, e, f sont aisément identifiables (Fig. 28), il nous reste à déterminer, conformément aux prescriptions sur l'apparition d'un zéro, laquelle des deux configurations g, $\bar{h}$ ou $\bar{g}$, h préservant toutes les deux la continuité des modules est celle que nous garderons. Nous avons pour cela reconstruit pour les deux possibilités les modules des amplitudes d'ondes partielles et nous avons conservé celle qui conservait une structure résonnante dans l'onde G_9 au détriment de P_3 (Fig. 29).

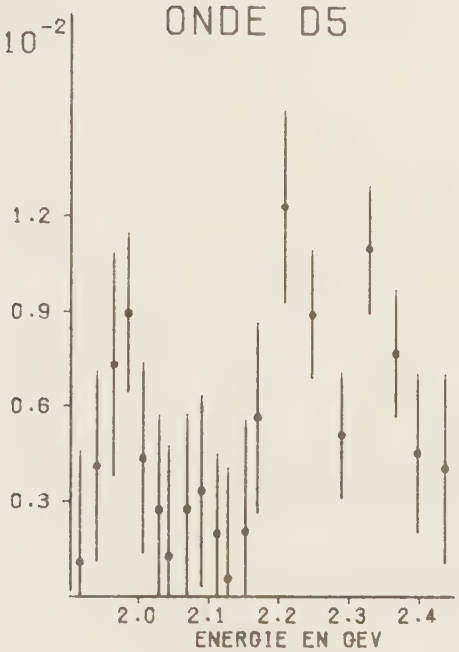
Les résultats obtenus à l'aide de six zéros expérimentalement observables et 2 zéros fictifs ou de huit zéros calculés sont tout à fait compatibles, sauf pour le module de l'onde P_3 ce qui nous oblige à penser que la résonance suggérée dans cette onde reste douteuse.

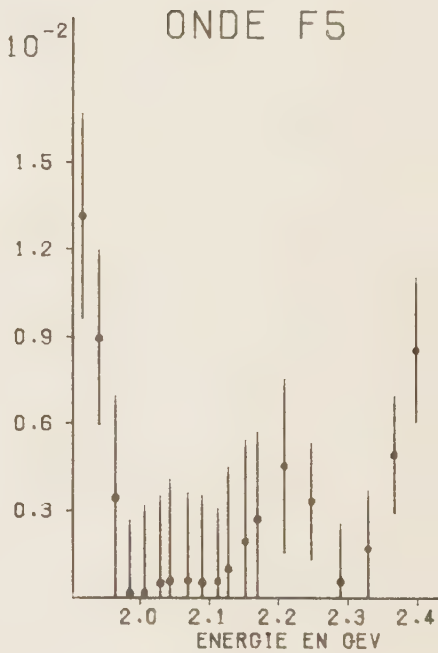

ONDE S1
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

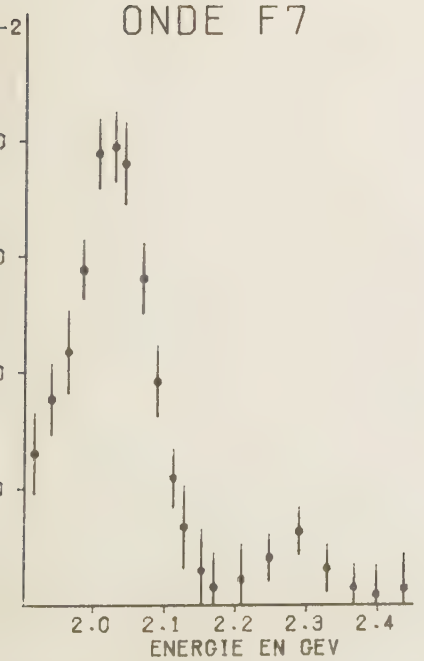

ONDE P1
10^{-2}
4.0
3.0
2.0
1.0
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

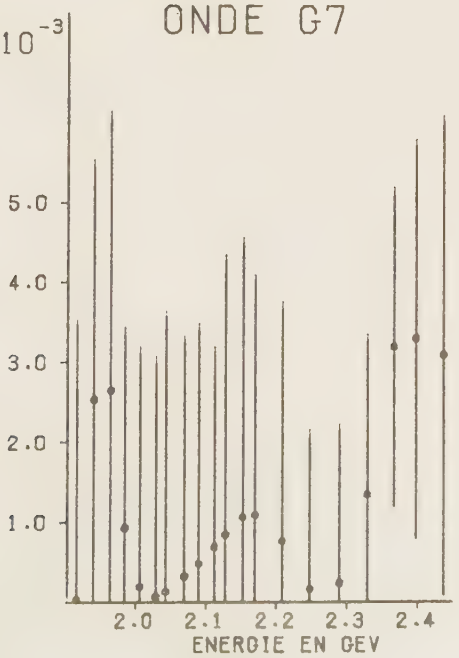

ONDE P3
10^{-2}
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE D3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE D5
10^{-2}
1.2
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE F5
10^{-2}
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE F7
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV


ONDE G7
10^{-3}
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

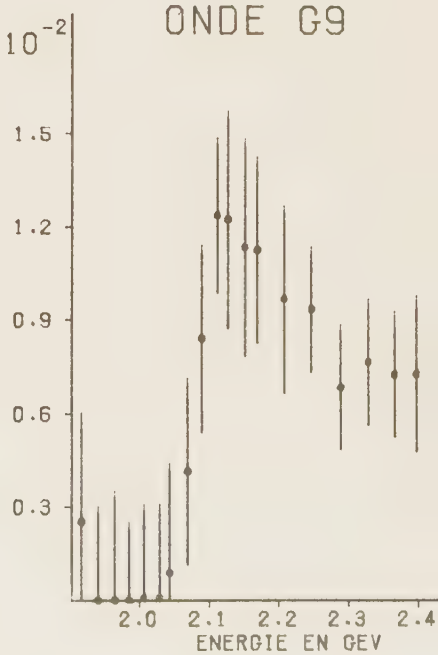

ONDE G9
10^{-2}
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
2.0 2.1 2.2 2.3 2.4
ENERGIE EN GEV

Fig 20

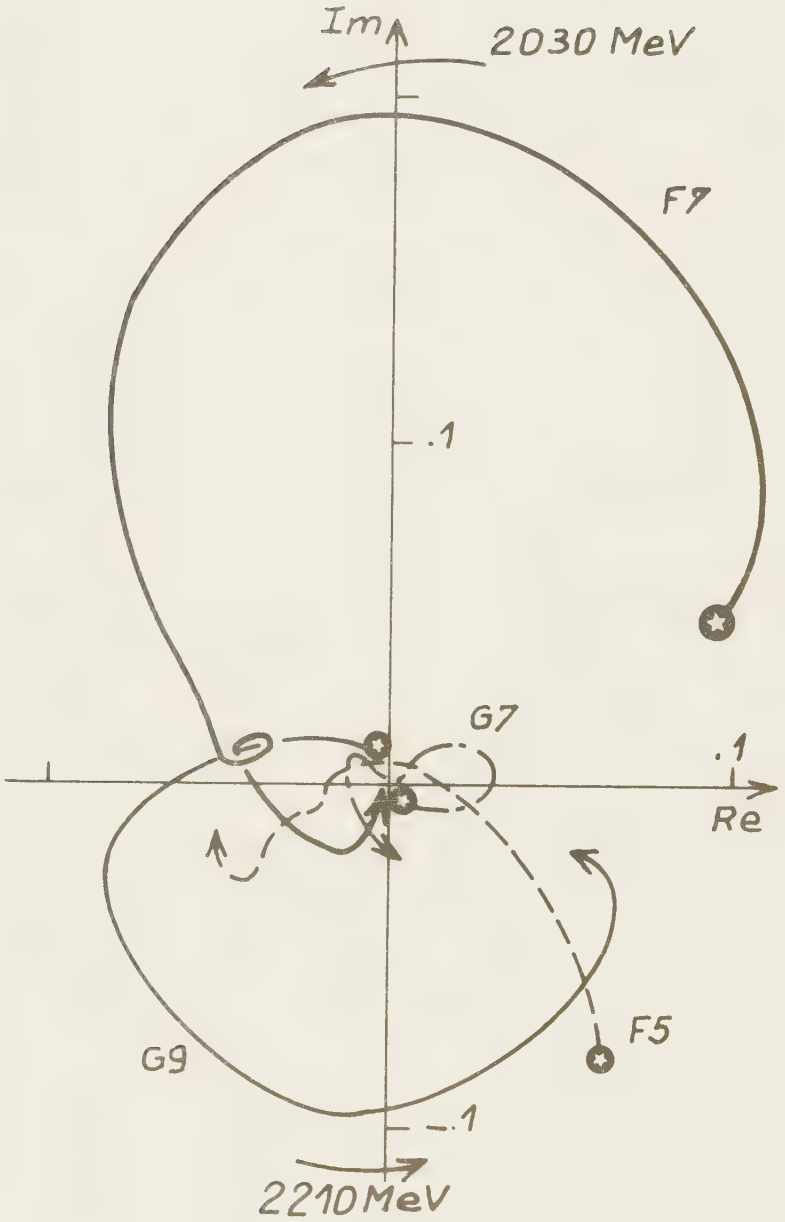


Fig. 30

A P P E N D I C E C-1

-:-

A PROPOS DE LA RECONSTRUCTION DES AMPLITUDES.

-:-

Nous avons vu dans la seconde partie comment on pouvait, connaissant la forme de l'amplitude F(W), évaluer les amplitudes d'ondes partielles $T_{j,\ell}$.

$$\text{Soit} \quad F(W) = \Sigma\left(\alpha_\ell \, P_\ell\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right) + \frac{W - W^{-1}}{2} \beta_\ell \, P'_\ell\left(\frac{W + W^{-1}}{2}\right)\right) \qquad (1)$$

Connaissant les propriétés d'orthogonalité des $P_\ell(Z)$ et le développement de F(W) sur les polynômes $R_{J,L}(W)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} T_{\ell+1/2,\ell} &= \frac{1}{2\ell + 1} \, (\alpha_\ell + \ell \, \beta_\ell) \\ T_{\ell-1/2,\ell} &= \frac{1}{2\ell + 1} \, (\alpha_\ell - (\ell + 1) \, \beta_\ell) \end{aligned} \qquad (2)$$

Les formules (2) nous permettent de calculer les $T_{j,\ell}$ à l'aide des coefficients α_ℓ, β_ℓ.

Normalisation :

Ecrivons $t_{j\ell} = \rho \, e^{i\phi} \, T_{j,\ell}$

alors $$A_0 = \sum_j (j + 1/2) \, |t_{j\ell}|^2$$

la limite d'unitarité impose $A_0 \leqslant 1/4$, ce qui est partout vérifié dans la voie $\Lambda\,\pi^\circ$, et

$$\rho^2 = \frac{A_0}{\sum (j + 1/2) \, |T_{j\ell}|^2}$$

La taille du module de l'onde partielle de spin j et de moment angulaire ℓ est ainsi fixée par la section efficace, la phase de cette même onde est la phase de l'onde de spin j le plus élevé que nous calculons.

$$t_{j\ell} = \left(\frac{A_0}{\Sigma (j + 1/2) \, |T_{j\ell}|^2} \right)^{1/2} T_{j\ell} \, e^{i\phi_j}$$

Q U A T R I E M E P A R T I E

-:-

RESULTATS - DISCUSSION

-:-

C H A P I T R E I

-:-

NOS RESULTATS ET LES ANALYSES RECENTES.

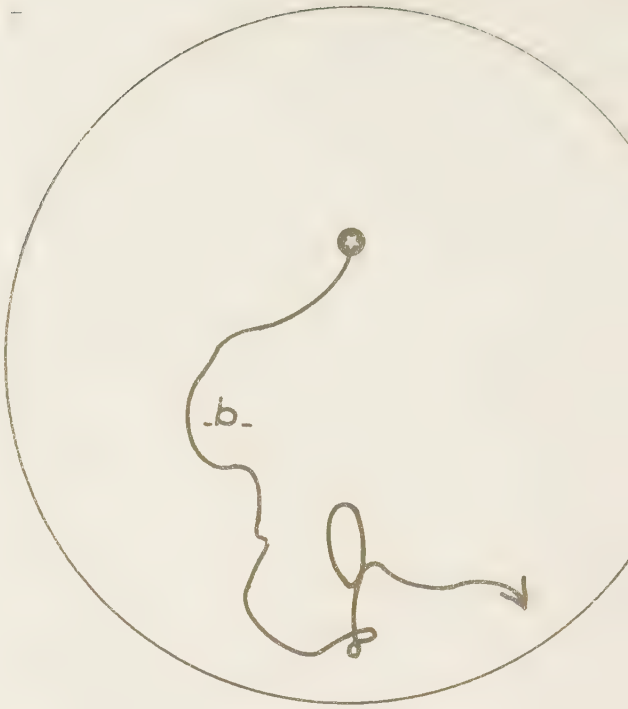
-:-

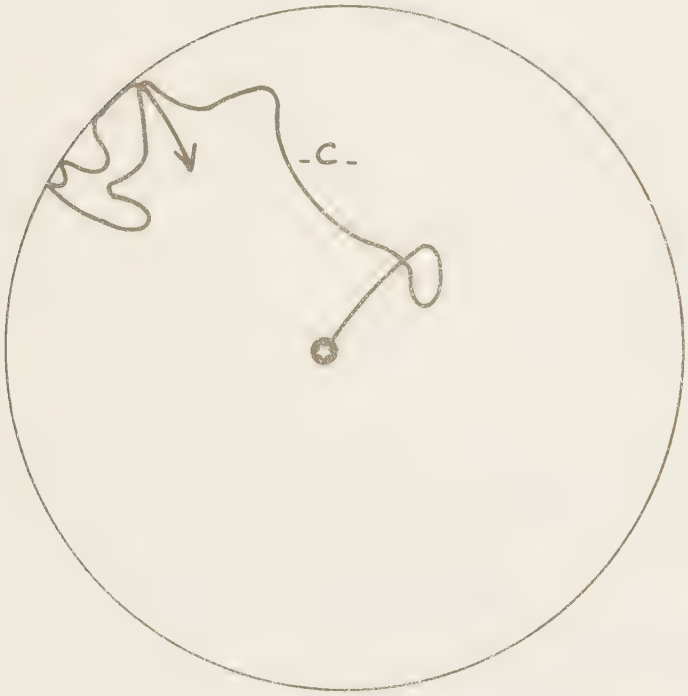
I - LES RESONANCES Σ ENTRE 1540 et 2440 MeV.

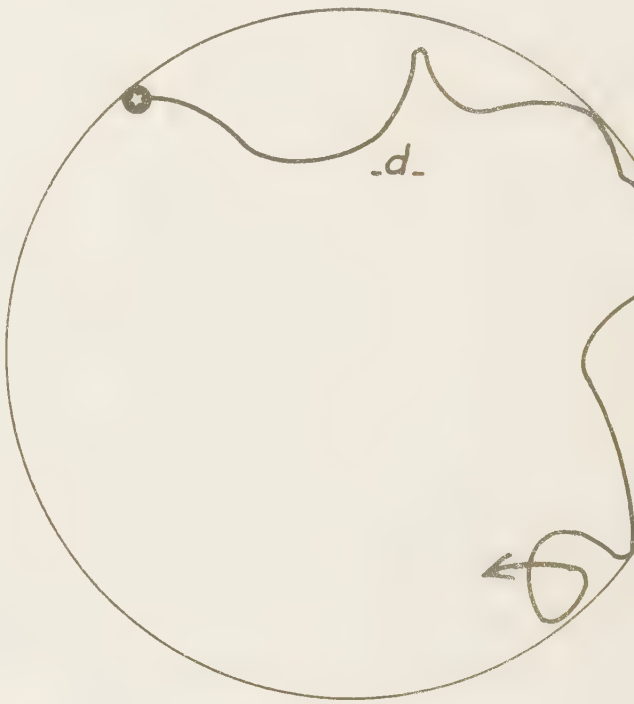
Dans la troisième partie de notre exposé nous avons présenté notre analyse en donnant le plus de détails possibles sur la méthode utilisée, toutes les difficultés rencontrées ont fait l'objet de discussions approfondies. Nous voudrions, ici, faire un bilan de notre analyse et, mettre en évidence les avantages et les limites de la méthode.

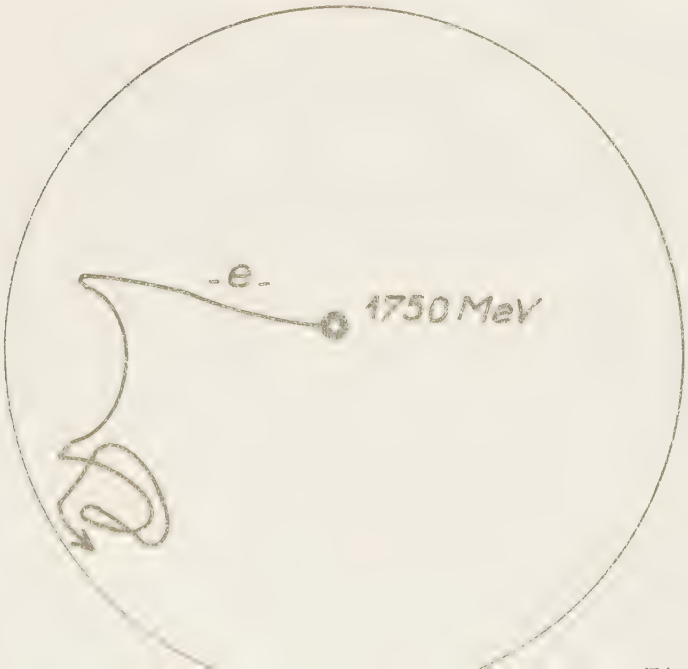
Nous sommes en mesure de présenter six trajectoires de zéros a, b, c, d, e, f depuis 1540 Mev (Fig. 31), la dénomination alphabétique choisie correspondant à l'ordre d'apparition. Compte tenu de la continuité que nous avons soigneusement étudiée et discutée pour chacune des trajectoires, nous avons décidé de retenir une seule configuration qui sera notre configuration de référence, notée : a b c $\bar{d}_t$ e $\bar{f}$. Sur la base de cette combinaison de trajectoires nous présenterons nos résultats en deux tranches d'énergie.

a


b


c


d


e
1750 MeV

f
1850 MeV

1 - Entre 1.540 et 1.860 MeV.

Solution A

L'étude de cette solution a b c d (e) nous a conduit aux conclusions suivantes :

- L'onde S_1 résonne avec E_R = 1680 MeV, Γ = 100 MeV, $\sqrt{xx'}$ = -,25
- L'onde P_1 présente des structures à 1670 MeV et 1720 MeV qui que paraissent pas devoir être assimilées à des résonances.
- L'onde P_3 est compliquée mais ne donne pas lieu à une résonance.
- L'onde D_3 présente un signal aux environs de 1660 MeV mais ce signal est faible et à la limite de notre sensibilité de détection.
- L'onde D_5 résonne avec E_R = 1765 MeV, Γ = 110 MeV, $\sqrt{xx'}$ = -.28.

Solution B

Une variante de la solution A est obtenue si l'on admet que la trajectoire a est extérieure au cercle. La solution B correspond alors à la configuration = $\bar{a}$ b c $\bar{d}_t$.

Pour les ondes S_1, D_3 et D_5 les conclusions restent inchangées :

- L'onde P_3 montre une bosse vers 1580 MeV qui ne semble pas interprétable en termes de résonance, mais plutôt due à une forte partie réelle.
- L'onde P_1, elle, présente des structure à 1670 et 1720 MeV plus nette cette fois que dans la solution A. Cependant si une résonance peut exister à 1670 MeV en revanche il paraît difficile d'en trouver une à 1720 MeV.

Solution C.

Nous avons groupé ici les solutions correspondantes à l'introduction du 4^e zéro vers 1650 MeV. Nous ne retiendrons d'elles que la possibilité d'obtenir une résonance $\Sigma(1765)$ de couplage moitié moindre à celui admis habituellement pour le canal $\Lambda\,\pi^\circ$.

2 - De 1860 MeV à 2440 MeV.

Cette zone d'énergie au moins jusqu'à 2100 MeV semble être plus claire, deux solutions seulement sont à retenir.

Solution A

Cette solution prolonge très correctement la solution A à plus basse énergie.

- L'onde F_5 résonne pour E_R = 1915 Mev Γ_R = 60 MeV $\sqrt{xx'}$ = -,1
- L'onde F_7 résonne pour E_R = 2027 MeV Γ_R = 160 MeV $\sqrt{xx'}$ = ,18

Les ondes S_1, P_1, P_3, D_3, D_5 ne présentent aucun comportement caractéristique d'un état résonnant si l'on examine les diagrammes d'Argand.

Solution B

Cette solution diffère de la précédente sans que nous puissions véritablement dire quelle est celle que nous devrions retenir. En effet, entre 1900 et 2100 MeV nous avons conjugué la trajectoire d ce qui revient à lui faire traverser le cercle en D_2, hélas si nous examinons cette même trajectoire aux énergies inférieures, elle longe le cercle unité et, nous n'avons pas d'argument en faveur d'une traversée ou non.

La forme des modules carrés des ondes résultantes de cette configuration de zéros nous conduit à introduire une résonance dans l'onde F_7 pour une masse de 1940 MeV qui vient s'ajouter au F_7 (2030).

Au-delà de 2100 MeV nous avons déjà discuté la méthode (cf. troisième partie) de reconstruction des amplitudes d'ondes partielles jusqu'à $J^P = 9/2^-$. Cette reconstruction plaide en faveur de trois candidats possibles pour des résonances.

- Une résonance G_9 à 2215 MeV pour une largeur de 150 MeV et un couplage $\sqrt{xx'} \sim -,1$.
- Une résonance D_5 à 2260 MeV pour une largeur de 100 MeV et un couplage $\sqrt{xx'} \sim ,1$.
- Enfin, le module carré de l'amplitude pour l'onde P_3 présente une forme de Breit-Wigner centrée à 2090 MeV avec une largeur de l'ordre de 100 MeV.

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats de notre analyse.

Onde	Masse en MeV	Largeur	Amplitude à la résonance	Etat
S_1	1680-1700 MeV	100 MeV	-.25	établie*
P_3	2070-2120 MeV	100 MeV	.10	douteux
D_3	1650	80 MeV	.05	établie
D_5	1765	110 MeV	-.30	établie
	2260	100 MeV	.11	Suggérée
F_5	1915	60 MeV	-.1	établie
F_7	2030	160 MeV	.20	établie
	1940		$\pm$.12	deuxième état possible
G_9	2215	140 MeV	-.1	avec un bon degré de confiance.

* Cette résonance est établie à 1750 MeV. Il reste encore à prouver qu'un seul état existe dans cette onde entre 1600 et 1750 MeV.

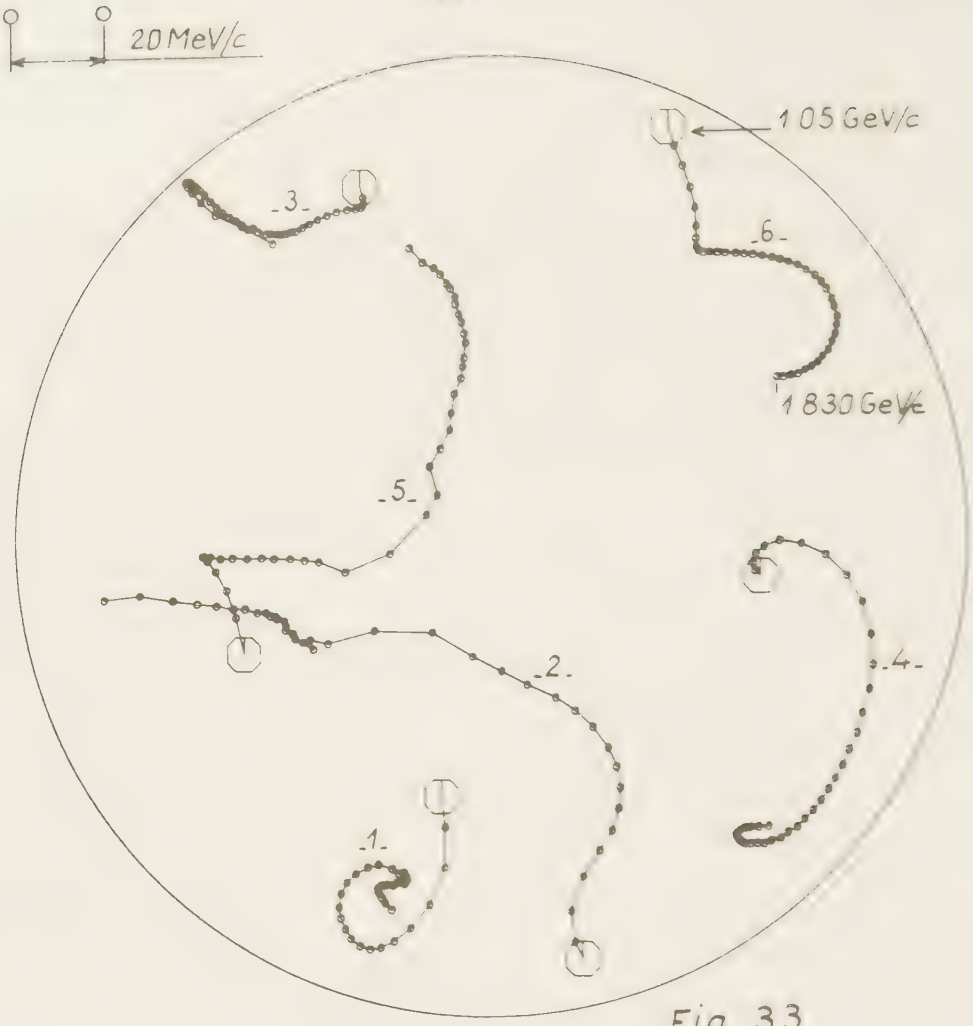

20 MeV/c
1 05 GeV/c
_3_
_6_
1 830 GeV/c
_5_
_2_
_4_
_1_

Fig. 33

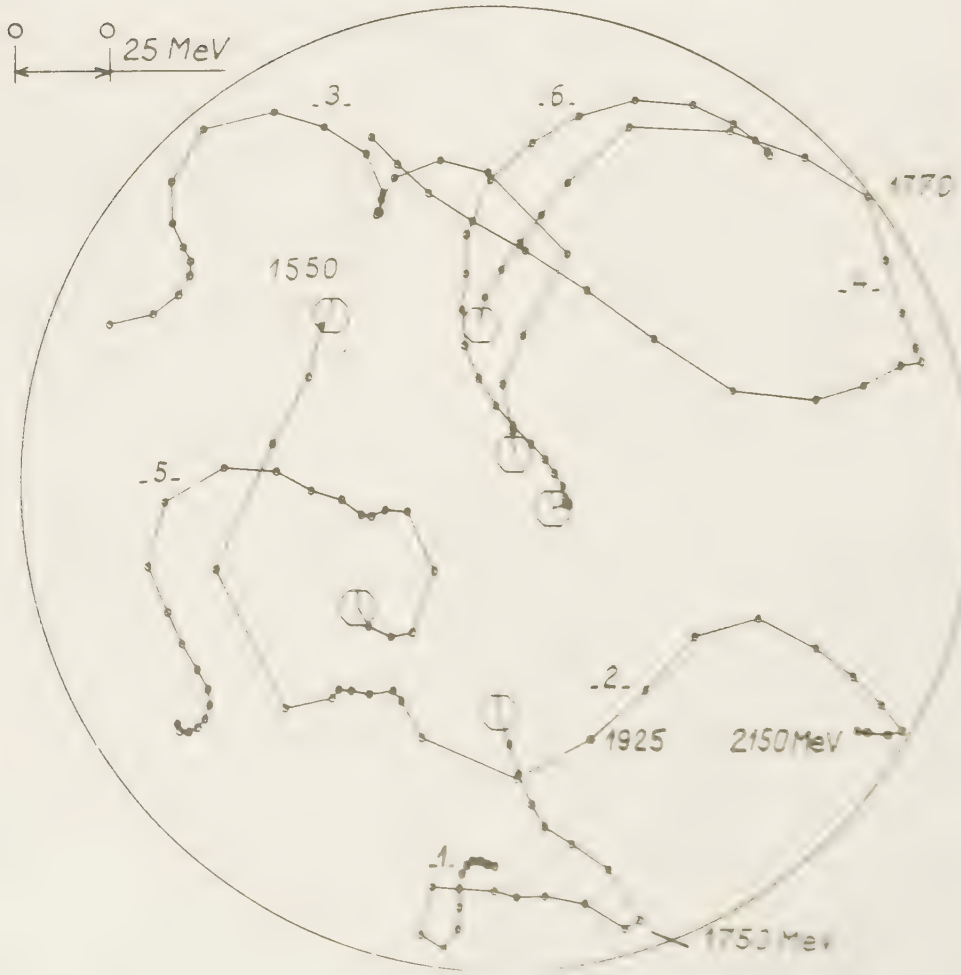

25 MeV
_3_
_6_
1770
1550
_7_
_5_
_2_
1925
2150 MeV
_1_
1750 MeV

Fig. 32

II - COMPARAISON AUX ANALYSES RECENTES.

Dans ce paragraphe nous voudrions essentiellement comparer nos résultats à deux analyses qui couvrent une zone d'énergie comprise entre 1540 et 2250 MeV et, plus partiellement, nous examinerons aussi les analyses localisées sur 100 MeV d'énergie.

Après l'exposé que nous venons de faire, la démarche naturelle pour faire l'étude critique des analyses existantes est de reconstruire les trajectoires de zéros en partant cette fois des ondes partielles.

Chaque analyse en ondes partielles présente 1 ou 2 solutions et, par conséquent 1 ou 2 ensembles d'amplitudes complexes $T_{j\ell}$ d'après l'expression du développement sur la base des $R_{j\ell}(W)$: $F(W) = \Sigma\, T_{j\ell}\, R_{j\ell}(W)$, nous pouvons déduire la forme de F(W) et la configuration de zéros correspondante. Cette configuration de zéros sera ensuite comparée à la nôtre.

- Analyse due à Van-Horn (réf. 5).

Van-Horn a réalisé une analyse dépendante de l'énergie pour la réaction $K^- p \to \Lambda \pi^\circ$ entre 1537 MeV et 2215 MeV.

Nous avons choisi les résultats de son meilleur ajustement (Fit H) et pu ainsi reconstruire 6 trajectoires de zéros pour 25 énergies comprises entre 1550 et 2150 MeV (Fig. 33).

Pour simplifier la comparaison des trajectoires nous avons convenu de les dessiner à l'intérieur du cercle en prenant soin de noter la configuration exacte de l'ajustement H.

Dans un souci de clarté nous ferons une suite de remarques dont nous tirerons les conséquences.

1 - Les trajectoires issues d'une analyse dépendante de l'énergie sont lisses et continues,ce que nous constatons sur la figure 33.

2 - La position des zéros stables dans le plan complexe est identique à celle que nous avons calculé.

3 - La présence de six trajectoires depuis 1550 MeV dans l'analyse de Van Horn semble entrainer des modifications dans leur continuité par rapport à la notre. En effet, au moins 2 trajectoires sur les 6, nous l'avons vu, relient entre eux des zéros instables jusque vers 1750- 1850 MeV et peuvent par conséquent induire des variations sur la position des autres ce qui explique les choix de continuité différents.

4 - Si nous notons 1, 2, 3, 4, 5, 6 les trajectoires de Van-Horn la configuration de l'ajustement H est schématisé par : $\overline{1}_t$, 2, 3, $\overline{4}_t$, 5, $\overline{6}$.

Nous relevons deux désaccords entre cette configuration et la nôtre.

- La trajectoire 1 est extérieure au cercle puis le traverse à 1750 MeV alors que notre trajectoire a, qui lui correspond, ne le traverse pas. De plus cette trajectoire reste près du cercle unité jusqu'à 2150 MeV.

- La continuité choisie pour les trajectoires 4 et 2 est différente de la notre au-delà de 1950 MeV.

En revanche nous sommes d'accord sur la façon dont chacune des trajectoires s'introduit.

Dans l'ensemble et, malgré les divergences sur certaines continuités de trajectoires, la configuration de Van-Horn, exception faite de la trajectoire 1, est voisine de la nôtre.

Van-Horn propose les résonances suivantes :

$S_1(1700)$, $S_1(1990)$, $P_1(1655)$, $P_3(1925)$, $D_3(1660)$, $D_3(1970)$
$D_5(1765)$, $F_5(1920)$, $F_7(2030)$.

La seule résonance avec un couplage inférieur à .1 que nous retrouvons est le $F_5(1915)$. Notre solution donne à peu de chose près les mêmes paramètres pour $D_5(1765)$, $F_7(2030)$ et $S_1(1700)$, mais nous sommes en désaccord sur les autres états proposés notamment pour l'onde $D_3(1660)$ où nous pensons que la valeur du couplage doit être au moins inférieure de moitié à celle proposée par Van-Horn ($\sqrt{xx'} = .1$). L'onde P_1 suggérée résonnante à 1665 MeV provient peut-être de la trajectoire a ; en effet nous avons constaté (cf. Troisième Partie),que si a est prise extérieure au cercle avant 1750 MeV, les structures dans l'onde P_1 sont plus nettes et éventuellement interprétables en termes de résonance, cependant, puisque notre solution canonique demande une trajectoire a intérieure à plus haute énergie et que nous n'avons pas mis en évidence de point où la traversée du cercle serait possible, nous avons rejeté cette possibilité.

- Analyse due à Baillon (réf. 7).

Utilisant plus de 100 points expérimentaux entre 1540 et 2150 MeV Baillon et Litchfield ont réalisé une analyse semi indépendante de l'énergie de la voie $\Lambda\,\pi^\circ$. Les auteurs ont pris soin de controler leur solution à l'aide des zéros de Barrelet. La configuration de trajectoires correspondant à leur solution préférée (Sol. 1) est présentée sur la figure 34.

1 - Les trajectoires sont ici numérotées de 1 à 6 dans l'ordre chronologique de leur apparition, ce qui nous permettra une identification plus aisée avec nos trajectoires.

- Les trajectoires 3 et 6 sont identiques à nos trajectoires c et f.

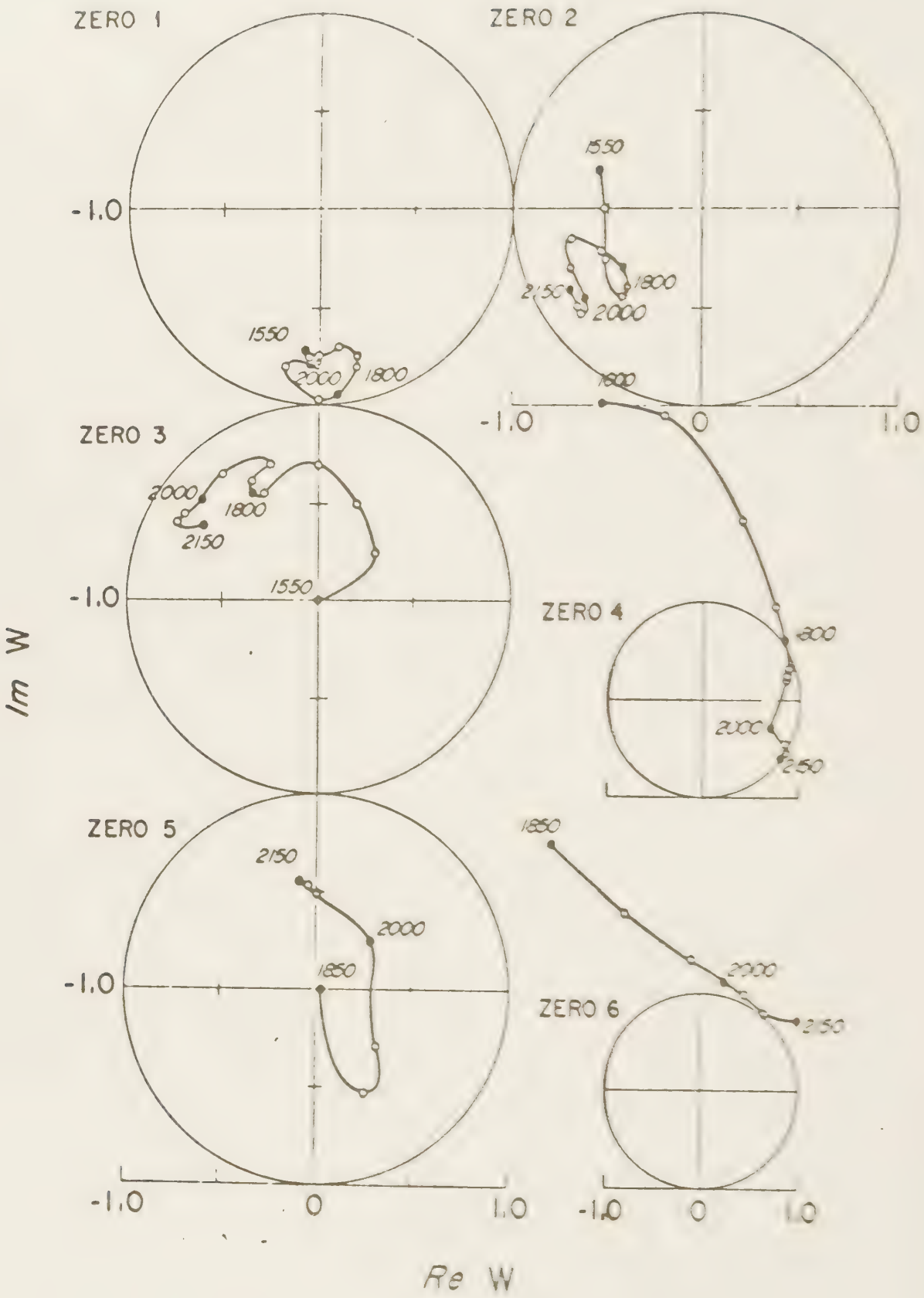

ZERO 1
ZERO 2
ZERO 3
ZERO 4
ZERO 5
ZERO 6
-1.0
0
1.0
1550
1800
2000
2150
1850
Im W
Re W

Fig 34

- La trajectoire 4 n'est identique à notre trajectoire d qu'au delà de 1700 MeV. Ceci est vraisemblablement dû au fait que nous avons considéré la trajectoire d présente depuis 1550 MeV.

- Les trajectoires 1 et 2 sont identifiables à nos trajectoires a et b jusque vers 1800 MeV. Au-delà la trajectoire 1 correspond plutôt à notre trajectoire b et la trajectoire 2 à notre trajectoire e.

- Enfin la trajectoire 5 au-delà de 1900 MeV correspond à notre trajectoire a.

2 - Les échanges de trajectoires entre les deux configurations ne sont pas essentiels étant donné la solution choisie qui, globalement, est semblable à la nôtre.

Baillon et Litchfield sont amenés à faire les conclusions suivantes :

- Entre 1750 et 2060 MeV une solution unique comporte les deux résonances dominantes $\Sigma(1765)$ et $\Sigma(2030)$.

- Au-dessus de 2060 MeV les solutions dépendent de l'apparition d'une onde G.

- En-dessous de 1750 MeV deux solutions sont ambiguës différant l'une de l'autre par la traversée ou non du zéro 1 vers 1750 MeV. Moyennant ces trois constatations les auteurs choisissent une solution, celle où le zéro 1 ne traverse pas le cercle.

$S_1(1780)$	$D_3(1685)$
$P_1(1660)$	$D_3(1950)$
$P_1(1770)$	$D_5(1765)$
$P_1(1960)$	$F_5(1920)$
$P_3(1720)$	$F_7(2035)$
$P_3(2120)$	

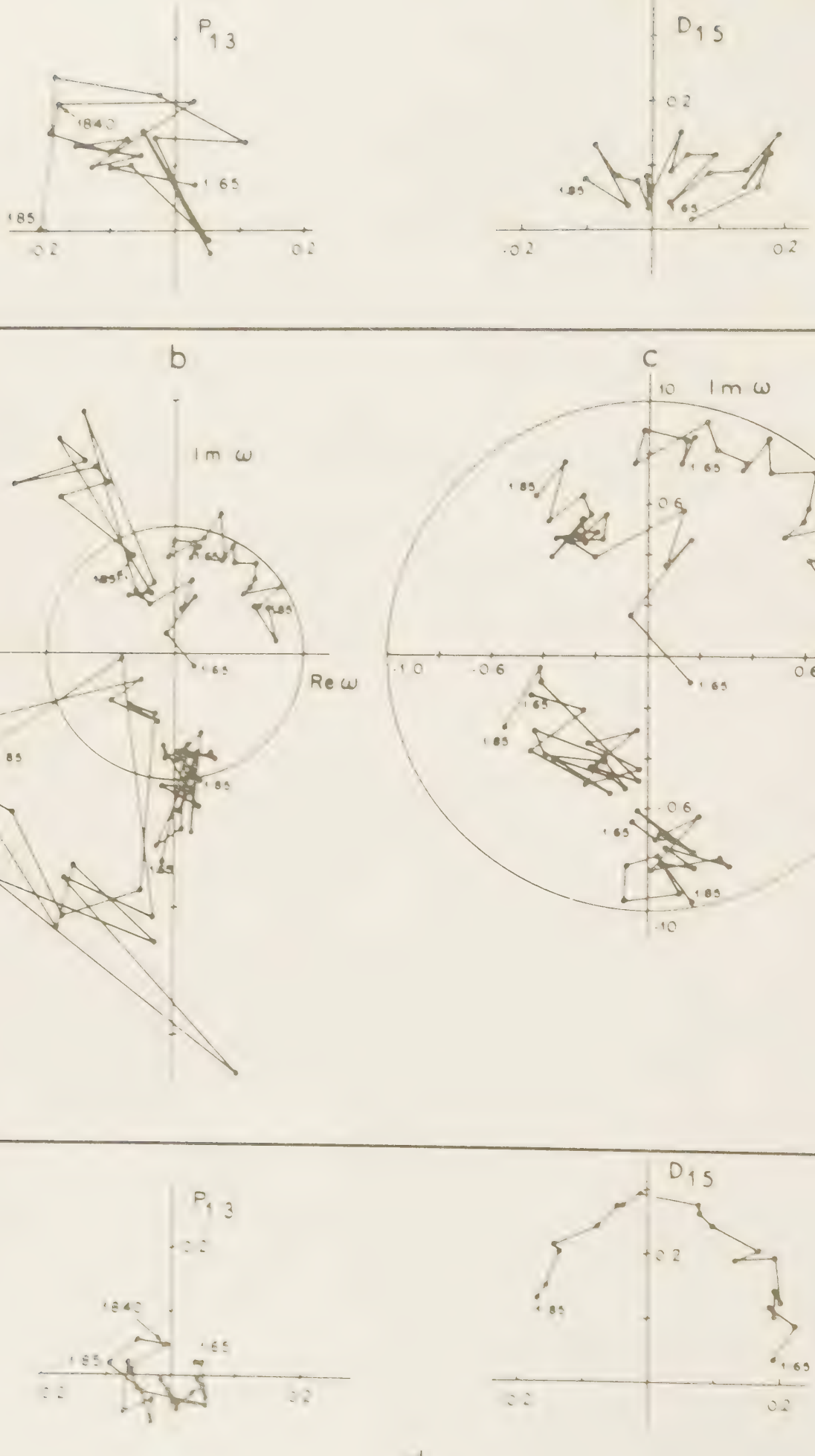

P13
1840
1.65
1.85
-0.2
0.2
D15
0.2
1.85
1.65
-0.2
0.2
b
Im ω
Re ω
1.65
1.85
c
1.0
Im ω
0.6
1.65
1.85
-1.0
-0.6
0.6
1.0
Re ω
-0.6
-1.0
P13
0.2
1840
1.65
1.85
-0.2
0.2
D15
0.2
1.85
1.65
-0.2
0.2
d

Fig. 35

Nous retrouvons dans cette analyse la même ambiguïté due au zéro numéro 1.

Après un examen attentif des trajectoires, nous nous demandons comment les auteurs ont pu faire traverser leur trajectoire 1 vers 1750 MeV ! (Fig. 34). Cela dit nous sommes cependant en contradiction avec les résultats proposés à basse énergie, en effet, si l'onde P_1 est structurée entre 1660 et 1760 MeV c'est, pour nous, dans le cas où le zéro a(1) est à l'extérieur c'est-à-dire juste le contraire de ce que prétendent Baillon et Litchfield.

- Analyses dues à Litchfield, Langbein-Wagner, C-S.
  Litchfield (Réf. 11).

Cette analyse a été réalisé entre 1 GeV/c et 1,85 GeV/c à l'aide d'un ensemble de données réunies par l'auteur. Hormis les résonances établies $\Sigma(1915)$, $\Sigma(2030)$, Litchfield propose trois états susceptibles de résonner :

$$P_1(1920), \quad P_3(2070) \quad \text{et} \quad D_3(1940).$$

Nous avons reconstruit les zéros de cette analyse (Fig. 33), la différence cette fois est assez importante avec notre configuration. En effet, seules les trajectoires 6, 1 et 3 sont à peu près identifiables aux nôtres y compris dans leur configuration puisque la trajectoire 6 est choisie extérieure au cercle comme notre trajectoire f.

Des trois nouveaux états proposés par Litchfield nous ne trouvons que le $P_3(2070)$.

- Langbein-Wagner (réf. 10).

Cette fois nous avons affaire à une analyse indépendante de l'énergie dont l'inconvénient majeure est le risque de lier entre elles des solutions différentes d'une énergie à l'autre. C'est ce que nous constatons dans le cas de cette analyse. La figure 35 extraite d'une communication faite par Berthon

à Formigal (Réf. 14), illustre très bien ce type de problème. Sur cet exemple nous comprenons comment le fait de réaliser une analyse en ondes partielles sans la contrôler à l'aide des zéros de l'amplitude peut-être préjudiciable.

- Collaboration C-S (réf. 3).

L'analyse du canal $\pi^{\circ}\Lambda$, réalisée dans cette collaboration entre 2,07 et 2,45 GeV, nous a conduit à envisager trois nouveaux états résonnants possibles d'isospin 1 dans les ondes P_3, D_5 et G_9. Comme toute nouvelle résonance il faudrait bien sûr pour confirmer ces états d'autres analyses mais, nous pouvons dire cependant que de deux manières différentes et, en particulier, à l'aide des trajectoires de zéros nous avons pu détecter des résonances dans les mêmes ondes à des masses très voisines de celles trouvées par l'analyse dépendante de l'énergie. L'analyse réalisée à l'aide des trajectoires de zéros semble toutefois accorder plus de crédit aux états $G_9(2210)$, $D_5(2260)$ qu'à l'état $P_3(2140)$.

-:-

C H A P I T R E I I

-:-

DISCUSSION.

-:-

Dans le chapitre précédent nous avons présenté les résultats de notre analyse du canal $\Lambda\,\pi$ entre 1550 et 2450 MeV et nous avons aussi fait des commentaires sur les analyses déjà publiées. Nous allons, maintenant, essayer d'interpréter et de discuter nos résultats onde après onde.

S_1

C'est en analysant la réaction $K^- p \to \Sigma\,\eta$ (réf. 20) que fut trouvé l'état $\Sigma(1750,\ 1/2^-)$, cependant cet état reste encore un mystère en raison de couplages variés (réf. 21). Nous trouvons une résonance dont la masse est comprise entre 1680 et 1720 MeV qui pourrait être assimilée au $\Sigma(1750)$ et considérée comme partenaire possible de l'octet du $N(1535)$, $\Lambda(1670)$.

P_1

Plusieurs états résonnants ont été suggéré dans cette onde. Nous n'en retrouvons aucun même si le module de l'amplitude correspondante présente vers 1680 et 1920 MeV un aspect résonnant.

P_3

Nous avons mis en évidence une résonance possible dans cette onde à 2080 MeV déjà suggérée par Litchfield et Cox (réf. 11). Cependant dans ce cas précis nous devons rester prudents en effet, l analyse en ondes partielles dépendante de l'énergie réalisée dans notre collaboration avec Saclay (réf. 3) propose un état P_3 résonnant vers 2140 MeV nécessaire à l'amélioration du chi-carré alors que dans notre analyse ce même état ne présente pas de caractère de nécessité, il disparaît même lorsque l'on calcule huit zéros.

D_3

La résonance la mieux établie dans cette onde est le $\Sigma(1660)$, cependant nous avons montré combien elle était difficile à mettre en évidence au moyen de notre technique. Une explication possible à ce phénomène nous est fournie par SU(3), en effet les prédictions théoriques donnent (réf. 23) un couplage au canal $\Lambda\ \pi$ pour le $\Sigma(1660)$ environ moitié moindre (.05) au couplage expérimental ($\sim$ .1) et, étant donné nos erreurs expérimentales une telle amplitude à la résonance se trouve être à la limite de nos possibilités de détection.

Les autres états résonnants proposés dans cette onde $D_3(1940)$, $D_3(2070)$ restent douteux, en effet,même si le module est important à ces énergies, nous n'avons trouvé aucun comportement de résonance dans les diagrammes d'Argand. Nous devons remarquer à propos du $D_3(1940)$ que la variation de l'amplitude dans le plan complexe présente une structure du type point de rebroussement (réf. 11) qu'il est difficile d'interpréter aisément comme un effet résonnant.

D_5

Dans le canal $\Lambda\ \pi$ on trouve un effet dominant avec $J^P = 5/2^-$ dû au $\Sigma(1765)$. Cette résonance nous a servi de guide dans notre analyse en dessous de 1800 MeV, nous retiendrons à son sujet le fait que son couplage

au canal $\Lambda\,\pi$ pourrait varier entre ,15 et ,30. Une autre résonance est suggérée dans cette onde à une masse de 2260 MeV. Un tel état pourrait fort bien appartenir à l'octet $\{8^-\}$ des baryons comme partenaire du N(2100) et, dans un diagramme de Chew-Frautchi, être sur la trajectoire du $\Sigma(1750)\ 1/2^-$.

F_5

Il y a environ cinq ans la collaboration C-R-S confirmait l'existence d'un $\Sigma(1915)$ de $J^P = 5/2^+$ couplé au canal $\Lambda\,\pi$. Notre analyse retrouve cet état avec un signe et une amplitude à la résonance en accord avec les résultats admis. En revanche nous ne trouvons pas de $\Sigma(2250)$ proposé par Van-Horn dans l'onde F_5.

F_7

Deux états résonnants sont prédits dans l'onde F_7, l'un appartient au décuplet qui contient la récurrence de Regge du $\Sigma(1385)$ c'est le $\Sigma(2030)$ bien établi, que nous retrouvons dans notre analyse et qui en raison de son couplage, important à $\Lambda\,\pi$, nous a servi de guide au même titre que le $\Sigma(1765)$, l'autre appartiendrait à un octet comme partenaire du $N^*(1990)$.
Nous avons vu que dans une solution que nous ne pouvions éliminer à côté du $\Sigma(2030)$, se dessinait une forme résonnante pour une masse de 1940 MeV, nous nous garderons cependant de formuler une conclusion hâtive quant à l'existence réelle de cette résonance déjà entrevue dans une des solutions ambiguës reconstruite par Van-Horn (réf. 5).

$G_7 - G_9$

Une certain nombre de publications ont déjà proposé des explications de la structure vue aux environs de 2250 MeV, en section efficace totale, à l'aide d'amplitude résonnante dans les ondes G_7 ou G_9. Dans notre analyse en ondes partielles classique, l'état $J^P = 9/2^-$ est préféré. La méthode des zéros nous donne aussi des indications importantes en faveur d'un $G_9(2215)$. Pour finir nous constatons qu'une telle résonance se place bien comme partenaire éventuel d'un N(2130) dans un nonet récurrence de l'octet 5/2 bien connu constitué par N(1670), $\Sigma(1765)$, $\Lambda(1830)$..

C O N C L U S I O N

-:-

Adoptant un point de vue différent des analyses en déphasage, comme le suggérait Barrelet (réf. 13), nous avons décrit la diffusion $0^- \; 1/2^+ \rightarrow 0^- \; 1/2^+$ en utilisant les zéros de l'amplitude et leur dépendance avec l'énergie. Cette méthode une fois présentée, nous avons cherché à l'appliquer en réalisant une analyse détaillée de la réaction $K^- p \rightarrow \pi^\circ \Lambda$ entre 1550 MeV et 2500 MeV.

En-dessous de 1800 MeV avec quatre zéros munis de la seule hypothèse de l'existence d'une résonance $\Sigma(1765)$ dans l'état $J^P = 5/2^-$, nous avons montré qu'il était possible de reconstruire deux solutions possibles pour les comportements des amplitudes d'ondes partielles jusqu'à D_5. Nous avons ensuite été capables de reproduire les variations de ces amplitudes dans des diagrammes d'Argand, précisant ainsi les caractéres résonnants de certaines d'entre elles. La technique utilisée ici par rapport à une analyse classique comporte les avantages suivants :

- Aucune hypothèse n'est introduite sur le comportement d'une amplitude non résonnante.
- Le gain en temps de calculateur est important (environ un facteur 5).
- La visualisation des ambiguïtés discrètes inhérentes à toutes analyse en ondes partielles est rendue possible.
- Les résultats obtenus ne dépendent d'aucun ajustement puisque à dire vrai le lissage effectué sur la forme des A_ℓ, B_ℓ a contribué essentiellement à décrire les trajectoires de zéros, les données expérimentales fournissant au préalable l'essentiel des résultats.

Entre 1800 MeV et 2000 MeV l'apparition d'ondes partielles de moment angulaire L > 2 nous conduit à introduire de nouvelles trajectoires de zéros (n = J + L - 1/2). Cependant la complexité de la situation reste raisonnable, en effet, nous avons montré que six trajectoires suffisaient à ajuster, avec un bon degré de confiance, les données expérimentales (cf. Deuxième Partie).

En revanche, au-delà de 2 GeV, l'apparition de pic avant dans les distributions angulaires rend compte d'un nombre d'ondes partielles de plus en plus important. Nous pénétrons dans une zone d'énergie où les phénomènes de formation de résonance dans la voie S ne sont plus prédominants. Nous avons cependant pu avec succès poursuivre notre analyse et présenter une solution prolongeant continument celle trouvée à plus basse énergie, préservant les résonances connues $F_5(1915)$, $F_7(2030)$ et, suggérant des résonances dans les ondes D_5 et G_9.

Nous avons examiné les avantages et les limites de cette techniques en ce qui concerne la méthode et la physique qui en résulte :

L'un des avantages essentiels de notre méthode est sans aucun doute l'économie de temps de calcul.

Le lien des zéros en trajectoires ne présente pas de difficultés insurmontables et permet de suivre d'une énergie à l'autre le comportement des amplitudes d'ondes partielles. Cependant l'augmentation du nombre de zéros avec l'énergie entraîne les mêmes limitations qu'une analyse classique. Dans notre cas, par exemple, au-delà de 2 GeV l'apparition d'ondes de moment angulaire total supérieur à 7/2 entraîne la nécessité de calculer plus de zéros qu'il n'en suffit pour ajuster les données et il est très vraisemblable alors que la meilleure façon d'opérer est de réaliser un ajustement mixte faisant intervenir des zéros et des pôles. En ce qui concerne la physique, résultante d'une telle analyse, il est important de constater qu'avec le minimum d'hypothèse nous avons pu mettre en évidence des résonances et éliminer assez nettement une grande partie des ambiguïtés ce qui, a priori, n'était pas évident. Si les amplitudes ne sont pas paramétrées arbitrairement pour certaines configurations de zéros seul un lissage des données expérimentales nous a permis de suivre avec précision les trajectoires des zéros,

mais d'une part la continuité des trajectoires issues d'un lissage a toujours été contrôlé à l'aide des résultats bruts expérimentaux et, d'autre part, plusieurs lissages différents ont été essayé n'indiquant pas d'effets contradictoires.

Le bilan de cette technique utilisée, pour la première fois ici, à des fins d'analyse en ondes partielles sur un domaine d'énergie étendu ($\sim$ 1 GeV) est positif puisque finalement le but cherché de reconstruire les amplitudes d'ondes partielles est atteint de façon naturelle. A l'issu de cette étude nous ferons les dernières remarques suivantes :

- Une analyse, indépendante de l'énergie réalisée par une méthode de chemin minimum, devrait être complétée par un examen des trajectoires de zéros de façon à éviter de présenter des solutions dont la continuité d'une énergie à l'autre n'est pas garantie (cf. Troisième Partie).

- Les analyses dépendantes de l'énergie présentent, elles, obligatoirement des trajectoires de zéros lisses et continues. Il serait cependant intéressant de se livrer à un travail comparable à celui de Van-Horn qui consiste en la reconstruction de toutes les solutions ambiguës de la solution présentée.

- Enfin nous avons montré qu'il existait des solutions continues comportant les résonances baryoniques les mieux établies, mais avec des amplitudes maximales variant parfois de 50 %, c'est le cas par exemple du $\Sigma(1765)$. Peut-être, alors faut-il envisager de réexaminer certains ajustements théoriques effectués dans le cadre de SU(3) au moins pour le canal $\Lambda\,\pi$.

Quant aux états méritant confirmation pour être considérés comme des résonances à part entière, la plupart d'entre eux restent douteux même si des classifications plus larges (réf. 22) du type SU(6) ont encore de grande possibilité d'accueil pour ces états.

R E F E R E N C E S

-:-

1 - Armenteros et al.
Nuclear Physics, B 21 (1970), 15.

Armenteros et al.
Nuclear Physics, B 8 (1968), 233.

2 - Armenteros et al.
Nuclear Physics, B 8 (1968), 183.

3 - de Bellefon et al.
Nuclear Physics, B 90 (1975), 1.

4 - Berthon et al.
Nuclear Physics, B 20 (1970), 476.

5 - A.J. Van Horn - Ely - Louie
L.B.L. 34

A. J. Van Horn (Ph. D. Thesis) L.B.L. 1370.

A. J. Van Horn
Nuclear Physics, B 87 (1975), 157- 175 et 145- 156.

Smart et al.
Phys. Rev. Letters (1966), V. 17 n° 10, 556.

Clayton et al.
Soumis à la XVIIe Conférence Internationale des Hautes Energies 1974.

6 - Particle Data Group Tables.

7 - Baillon, Litchfield
à paraître dans Nuclear Physics (CERN/D.Ph.II/75-5)

8 - Kim
Phys. Rev. Letters, Vol. 19, n° 8 (1967).
Phys. Rev. Letters, Vol. 27 (1971), 356.

9 - Dalitz et Tuan
Ann. Phys. (N.Y.) 10, 307 (1960).
Ross et Shaw
Ann. Phys. (N.Y.) 13, 147 (1961).

10 - Langbein et Wagner
Nuclear Physics, B 47, (1972), 477.

11 - Litchfield
Nuclear Physics, B 22, (1970), 269.

12 - Lea, Martin, Moorhouse, Oades
Nuclear Physics, B 56, (1973), 77.

13 - Barrelet
Nuovo Cimento - 8 A, (1972), 331 et Thèse - Paris (1970).

14 - Berthon
L.P.C. 74-04 (Rapport interne).

15 - Cutkosky et Deo
Phys. Review, vol. 174, n° 5 (1968), 1859.
S. Ciulli
Nuovo Cimento, 61 A (1969), 463.
S. Ciulli
Nuovo Cimento, 61 A (1969), 787
S. Ciulli
Nuovo Cimento, 62 A (1969), 301.
Whittaker et Watson "A course of Modern Analysis".

16 - American Mathematical Society, V. XX et XXIII
- Walsh Interpolation and approximation.
- Szegö Orthogonal polynomials.

17 - Burkhardt
CERN Th. 1784.

18 - Tripp,
Ann. Rev. Nucl. Sci., 15, 325 (1965).

19 - Levi -Setti.
Lund (1969).

20 - Cline et al.
Phys. Lett., 41 (1967), 258.

21 - Faiman, Plane
Nuclear Physics, B 50 (1972), 379.

22 - Horgan
Nuclear Physics, B 71 (1974), 514.
Faiman
Nuclear Physics, B 32 (1971), 573.
Feynman et al.
Phys. Rev. D 2 (1970), 1267.

23 - Plane et al.
Nuclear Physics, B 22 (1970), 93.

LEGENDE DES FIGURES

-:-

PREMIERE PARTIE.-

Fig. 1 - Schéma représentant le volume fiduciel pour les points d'interaction dans le cadre de la collaboration C.S.

Fig. 2 - Histogramme de la masse carrée manquante au Λ° dans les réactions $K^- p \rightarrow \Lambda^\circ$ + neutres.

Fig. 3 a, b - Distributions angulaires de production et de désintégration du Λ°.

Fig. 4 a et b - Coefficients A_ℓ et B_ℓ pour la réaction $K^- p \rightarrow \Lambda \pi^\circ$ en fonction de l'énergie entre 1500 et 2500 MeV.
La courbe en continue représente l'ajustement par fractions rationnelles (P/Q).

DEUXIEME PARTIE.-

Fig. 5 - Système d'axes.

Fig. 6 a - Les feuillets Z^+, Z^- après transformation conforme.
b Position des zéros de $R_{j\ell}(W)$.

Fig. 7 a, b, c - A chaque impulsion de K^- incident entre 1,263 GeV/c et 2,516 GeV/c (20 points) nous avons représenté en coordonnées polaires les positions des 6 zéros (ρ_i, θ_i) intérieurs au cercle unité avec leur zone d'erreur, les histogrammes normalisés de $(1 \pm P) \frac{d\sigma}{d\Omega}$, les courbes résultantes de l'ajuste-

Fig. 8 - A une énergie donnée nous avons représenté les nuages de zéros correspondant à 300 tirages au hasard.

TROISIEME PARTIE.-

Fig. 9 a, b - Coefficients A_ℓ, B_ℓ pour les 7 énergies de la collaboration C.S. Les courbes continues résultent du meilleur ajustement de l'analyse en ondes partielles classique.

Fig. 10 - 4 trajectoires de zéros expérimentaux entre 1600 et 1800 MeV.

Fig. 11 - Modules carrés des amplitudes d'onde partielle pour $J^P = 5/2^-$ résultant de l'analyse à 4 zéros expérimentaux.

Fig. 12 - 3 trajectoires de zéros issues du lissage des coefficients A_ℓ, B_ℓ.

Fig. 13 - 8 solutions ambiguës présentant le module carré de l'amplitude pour l'onde D_3.

Fig. 14 - 15 - 4 trajectoires de zéros lissés.
3 puis 4 trajectoires de zéros lissés.

Fig. 16 a,b,c - Trois solutions discutées dans le texte représentant les modules carrés de S_1 à F_5, issus de l'analyse à l'aide de 4 zéros lissés.

Fig. 17 - Une solution représentant les modules carrés de S_1 à F_5 avec apparition du 4e zéro vers 1650 MeV.

Fig. 18 - 19 - Diagramme d'Argand pour les ondes S_1 et D_5.
- en trait discontinu la phase est imposée par D_5 résonnant.
- en trait plein la phase est imposée par S_1 résonnant.

Fig. 20 - 6 trajectoires de zéros expérimentaux calculées par maximum de vraisemblance entre 1,26 GeV/c et 2,52 GeV/c.

Fig. 21 - 64 solutions pour le module carré de l'onde F_7.

Fig. 22 - 6 trajectoires lissées.

Fig. 23 - Solution retenue presentant les modules carrés des ondes S_1 à F_7.

Fig. 24 - Diagramme d'Argand pour les ondes F_5, F_7.
- la courbe en trait discontinu pour F_7 correspond à la trajectoire d extérieure au cercle.

Fig. 25 - 6 trajectoires lissées.

Fig. 26 - Modules carrés des amplitudes d'ondes partielles de S_1 à G_9 reconstruits avec 6 zéros stables et 2 zéros fictifs.

Fig. 27 - Diagrammes d'Argand pour les ondes de S_1 à G_9 avec la phase de F_7 imposée.

Fig. 28 - 8 zéros.

Fig. 29 - Modules carrés des ondes S_1 à G_9 reconstruits avec 8 zéros.

Fig. 30 - Diagrammes d'Argand F_7, G_7, G_9 (8 zéros).

QUATRIEME PARTIE.

Fig. 31 - Nos trajectoires de zéros depuis 1540 MeV.

Fig. 32 - Trajectoires de zéros reconstruites à partir de la meilleure solution de Van-Horn.

Fig. 33 - Trajectoires de zéros reconstruites à partir de la meilleure solution de Litchfield.

Fig. 34 - Trajectoires de zéros issues de l'analyse de Baillon-Litchfield.

Fig. 35 - Trajectoires issues de l'analyse de Langbein-Wagner.
Les diagrammes d'Argand en haut de la page correspondent à la configuration b.
Les diagrammes d'Argand en bas de la page correspondent à la configuration c.

R E M E R C I E M E N T S

Monsieur Marcel FROISSART, Directeur du laboratoire, dans lequel ce travail a été réalisé, a non seulement accepté d'être président du jury, mais encore a examiné avec un soin tout particulier chaque chapitre de ma thèse distribué l'un après l'autre sous une forme parfois préliminaire. Je l'en remercie vivement.

Je voudrais remercier Monsieur Michel CROZON pour ses conseils et mon apprentissage de la physique expérimentale.

Monsieur André ASTIER, mon parrain au C.N.R.S., a bien voulu être rapporteur de cette thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

L'analyse nouvelle présentée résulte d'une collaboration étroite et constante avec Monsieur André BERTHON, je lui dois l'essentiel de ma formation de physicien.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à tous les physiciens de l'équipe à laquelle j'appartiens : MM. P. BILLOIR, J.M. BRUNET, G. TRISTRAM, J. VRANA pour leur contribution à l'expérience dont je présente certains résultats. Je tiens aussi à remercier tout particulièrement les physiciens de Saclay : MM. TALLINI, POULARD, REVEL.

Mademoiselle Danièle LEVAILLANT a assuré une grande partie de la gestion de l'expérience, l'importance de la qualité de ce travail est évidente.

Ma reconnaissance va aussi à tous ceux qui ont assuré la mesure et le dépouillement. Enfin je tiens à remercier Monsieur Patrick BONIERBALE pour le soin apporté au dessin des figures, Madame Josiane TERRIE pour la dactylographie du texte, MM. Daniel ARBOUSSE-BASTIDE et Jacques ORILLON pour le tirage.

J'exprime ma gratitude à l'IN^2P^3 et au C.E.A. qui ont permis la réalisation et l'exploitation de l'expérience.